

知っておきたいキーワード

ASEP (Asymmetric Simple Exclusion Process)

石黒 裕樹[†][†] 東京工芸大学 工学部

"ASEP: Asymmetric Simple Exclusion Process" by Yuki Ishiguro (Faculty of Engineering, Tokyo Polytechnic University, Kanagawa)

キーワード：数理モデル，ASEP，ランダムウォーク，渋滞，可積分系，非平衡統計力学

* 本稿の著作権は著者に帰属致します。

まえがき

現象の本質を捉えることは、分野に依らず普遍的に重要な学術的課題です。数理モデルを構築して解析することは、その課題に対する有用な手段です。複

雑な現象でも、その構成要素の動きを模擬した数理モデルを用いることで、メカニズムが見えてくることがあります。また、数理モデルはその背後に特別な構造が存在することもあり、数学的にも奥深い研究対象となっています。

本稿では、ASEP (Asymmetric Simple Exclusion Process) とよばれる確率過程を題材にして、数理モデルの魅力を紹介したいと思います。

ASEPとは

複雑な現象に対峙したとき、対応する数理モデルを構築することで、その本質を捉えられることがあります。本稿で紹介するASEPは、交通流などでしばしば問題になる渋滞を捉えることができる数理モデルです。

ASEPの解説に入る前に、ランダムウォークとよばれる数理モデルについて紹介したいと思います。ランダムウォークとは、粒子が確率的に移動する確率過程の数理モデルのことです。ランダムウォークにはさまざまなバリエーションが存在しますが、ここでは

次のような状況を考えてみましょう。図1 (a) に示すように、セルが直線上に並んだ一次元格子の世界を考えます。セルの中にある粒子が、レート(単位時間あたりの確率) p で右隣のセルへ移動し、レート q で左隣のセルへ移動する、というのがランダムウォークにおける時間変化のルールです。あまりにも単純すぎるように思われてしまうかも知れませんが、感染症の伝播や株価の変動など、幅広い分野の研究に应用されている数理モデルです。

ASEPは、ランダムウォークを多粒子系に拡張して、粒子間に排他的な相互作用を導入した数理モデルです^{1) 2)}。

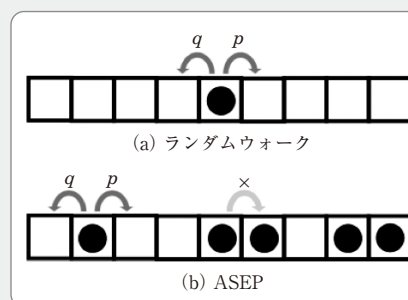



図1 ランダムウォークとASEP

先ほどのランダムウォークでは、格子には一つの粒子しか存在していませんでしたが、今度は格子に複数の粒子が存在する状況を 

☞ 考えてみましょう (図1 (b)). この場合にモデルの時間変化のルールを定めるには、粒子が他の粒子から受ける影響を新たに考慮する必要があります。

ASEPでは、時間変化のルールを「各粒子はランダムウォークする

(レート p で右隣りのセルへ移動し、レート q で左隣りのセルへ移動する)。ただし、粒子間には排他的な相互作用が働くため、各セルには一つの粒子しか入ることができない。すなわち、すでに粒子が入っているセルに移動することはできない。」と定めます。一粒

子ランダムウォークの場合と比べて、新しいルールは排他的相互作用 (各セルに最大一粒子しか入れない) のみですが、この拡張によってさまざまな現象を捉えることができます。

ASEPの物理

とても単純に思える ASEP ですが、さまざまな現象を記述することができます。例えば、ASEPは交通流を記述する数理モデルとして応用できることが知られています。粒子が左隣りのセルへ移動するレートをゼロ ($q = 0$) とした場合を考えてみましょう。このとき、粒子は右にしか移動しません。このような一方通行の ASEP は TASEP (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process) とよばれます。

図2のように、一次元格子を道路とみなして、粒子を車と思うことにしましょう。すると TASEP は交通流の数理モデルになっていることがわかります (図2 (b)). 交通流では、道路上で目の前に車がいる場合、前進することができません。TASEP における粒子間の排他的相互作用は、まさにそのような性質に対応しています (図2 (a)).

交通流の研究においては、渋滞のない快適な車の流れを実現することが重要です。TASEP を用いて粒子 (車) の流れを調べれば、渋滞の性質を捉えることができます。TASEP の物理を実際に考える際には、格子の端で粒子の振る舞いがどうなるか (境界条件) を指定する必要があります。いろいろな設定方法がありますが、ここでは右端のサイトと左端のサイトが繋がっている

とする周期的境界条件を考えてみましょう。この場合、例えば右端のサイトにいる粒子が右へ移動したとすると、左端のサイトからその粒子が出てくる、という状況が実現されています。

周期的境界条件における TASEP の粒子の流れは、粒子の密度によって特徴づけられます。密度というのは、道路上にどれだけ沢山の車が存在するか、を特徴づける指標であり、TASEP においては粒子数/セル数で定義されます。適当に最初の粒子配置を設定して、そこから TASEP のルールに従った時間変化を考えたときの粒子の流れについて調べてみることにしましょう。TASEP では、しばらく時間が経つと粒子の流れの期待値は変化しなくなることが知られており、このような状態を定常状態とよびます。定常状態に達したときの粒子の流れと密度の間には、図3のような関係があります。この図から、低密度の領域では密度が

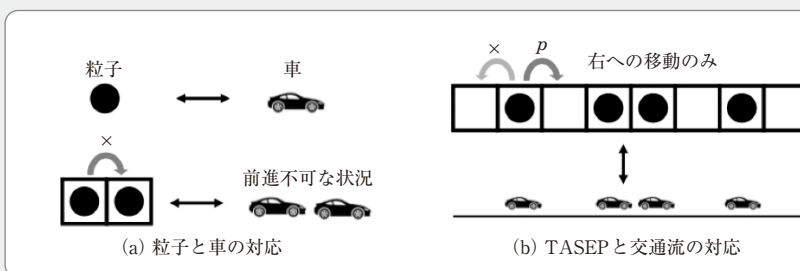


図2 交通流の数理モデルとしての TASEP

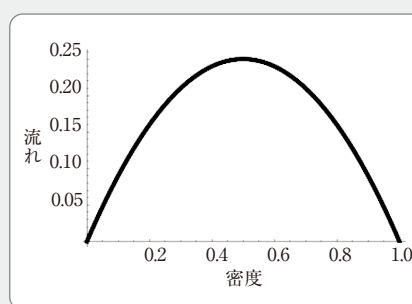


図3 密度と流れの関係

増えると流れが増大し、高密度の領域では密度が増えると流れが減少することが確認できます。これは、道路が空いているときは車の台数が増えると交通量が増加するが、道路が混雑してきたときは渋滞が発生するため、車の台数が増えるとかえって交通量が減少してしまう、ということに対応していますと捉えることができます。

ASEPの数理

ASEPの物理を理論的に調べるためには、時間変化を記述する式を立てて、数式に基づいた解析を行う必要があります。ASEPの時間変化はマスター方程式とよばれる微分方程式により捉えることができます。詳細には解説しませんが、ASEPのマスター方程式は、

$$\frac{d}{dt}|p(t)\rangle = \mathcal{M}|p(t)\rangle$$

という形式で表現されます。 $|P(t)\rangle$ は時刻 t における系の状態を記述するベクトルで、その成分は各粒子配置の実現確率で与えられます。 \mathcal{M} はマルコフ行列とよばれる遷移確率を表す行列です。このマスター方程式を解くことで、ASEPの物理を理論的に研究することができます。

ランダムウォークからASEPへと拡張する過程で、一粒子系から多粒子系へと拡張しました。多粒子系の時間変

化を記述する方程式を解くことは通常とても難しいのですが、驚くべきことにASEPの場合には厳密に解くことができます¹⁾²⁾。可解性の背後には特別な構造があり、可積分系とよばれる分野において数学的な観点からも盛んに研究されています。ASEPは現象を記述する数理モデルという応用的側面だけでなく、厳密に解けるモデルという数理的側面についても興味深い研究対象となっているのです。

むすび

数理モデルは、現象を捉えて課題を解決するための有力なツールであるとともに、それ自体が奥深い構造を有する研究対象です。今回紹介したASEPは、一粒子しか入れないセルが並んだ

格子上を粒子が確率的に移動する、という単純な数理モデルですが、渋滞の本質を捉えることができ、交通流をはじめとしたさまざまな分野へ応用することが可能です。また、多粒子系であるにも関わらず厳密に解けるという可解モデルとしての側面もあり、物理学

的にも数学的にも面白い数理モデルとなっています。本稿を通して、少しでもその雰囲気をお伝えすることができていれば幸いです。

(2025年11月21日受付)

参考文献

- 1) R.A. Blythe and M.R. Evans: "Nonequilibrium steady states of matrix-product form: a solver's guide", J. Phys. A: Math. Theor. 40, R333 (2007)
- 2) O. Golinelli and K. Mallick: "The asymmetric simple exclusion process: an integrable model for non-equilibrium statistical mechanics", J. Phys. A: Math. Gen. 39, 12679 (2006)



石黒 裕樹

2023年、東京大学大学院工学系研究科博士課程修了。東京大学物性研究所特任研究員を経て、現在、東京工芸大学工学部助教。数理物理学の研究に従事。

キーワード募集中

この企画で解説して欲しいキーワードを会員の皆様から募集します。ホームページ (<https://www.ite.or.jp/>) の会員の声より入力可能です。また電子メール (ite@ite.or.jp), FAX (03-3432-4675) 等でも受け付けますので、是非、編集部までお寄せください。

(編集委員会)