Keywords you should know. 第36回

知っておきたいキーワード

ベイズの定理

ピトヨ ハルトノ†

†公立はこだて未来大学 情報アーキテクチャ学科

"Bayes Theorem" by Pitoyo Hartono (Department of Media Architecture, Future University-Hakodate)

キーワード：:条件付確率，ベイズの定理

確率は一意ではない

私達は意思決定をするときによく確率を使います．例えば，株への投資を検討する場合，さまざまな情報を入手し，ある程度“儲かる確率”を計算してから実際に株を買います．また，治療現場では，難しい手術を受ける前には，その手術の成功確率を気にする人がほとんどです．これらの確率は過去のデータや情報によって計算することができます．しかし，計算する人の持っている情報や知識の違いで確率の値は変わります．これは時に確率計算を困難にし，直感的な理解を阻む要因の一つです．持っている情報によって確率の値が変化する簡単な例をあげましょう．

偶数の目しかでないように細工されたサイコロを考えます．Aさんはサイコロが細工されたことを知り，Bさんは知りません．Aさんから見てこのサイコロを振ったときに2の目が出る確率が1/3に対し，情報を持っていないBさんにとっては均等な確率の1/6となります．つまり，同じ対象（サイコロ）と同じ事象（2の目の出現）を扱うにも関わらず，持っている情報によって異なる結果が現れます．ベイズの定理は上で述べたような，ある情報（条件）の下にある事象の確率（つまり，条件付確率）を求めるための計算法です．上の例では，Aさんは2の目の出る確率を計算するのではなく，“偶数の目しかでない”という条件の下で，2の目の出る確率を計算することになります．

男それとも女？

本稿では詳しい数学に触れずに，例を使ってベイズの定理の説明を試みます．

子供が二人いる家族を考え，その子供が二人とも男の子である確率を計算してみましょう（この計算をするためには，男の子と女の子の生まれる確率が1/2であることを前提とする）．もちろん答えは1/4です．これは，1人目の子供が男の子である確率（1/2）を二人目の子供も男の子である確率（1/2）とかけた値です．直感的にこれを図で説明しましょう．**図1**はすべての起こりうる組合せを表す“確率空間”としましょう．子供が二人とも男の子であることを示す領域は，この”確率空間“の1/4を占めているので，子供が二人とも男である確率が1/4となります．π（男，男）を二人とも子供が男である領域の面積，π（全体）を“確率空間”全体の面積とする場合，求める確率はそれらの面積の割合，π（男，男）/ π（全体）=1/4となります．ここで，確率の計算を面積の割合の計算に置き換えることで，問題を直感的に理解することができます．

次に問題を少し変えます．この家族の子供のうち一人は男という情報を入手した後で，もう一人の子供も男の子である確率を考えましょう．もう一人の子供は男または女の子であるので，その確率は1/2と直感的に考えたい気持ちはわかりますが，これは間違いです．その理由は，“確率空間”の大きさの変化にあります．ここでは，“子供の1人が男”ということが ☞

男，男	女，男
男，女	女，女

図1 確率空間

☞ わかった時点で，〔女，女〕の組合せを排除でき，考えるべき確率空間の面積は，π（全体=すべての組合せ）から（新しい全体＝〔女，女〕以外の組合せ）となります．

図2から明らかであるように，新しい”確率空間“の中で（男，男）の組合せが占める割合は1/3となります．つまり，問題の確率は1/3となります．ここでは，「子供の一人が男」という新しい情報によって，“確率空間”が変化することに注目していただきたい．また，入手できた情報が「一人目の子は男」であるときには子供が二人とも男である確率が1/2になることは同じ考え方で容易に計算できます．上の例から，ある条件が与えられたときに，確率空間が変化し，その結果，確率が一般的に変化することがわかります．確率を計算する上では，情報が確率空間にもたらす影響を把握することが重要です．

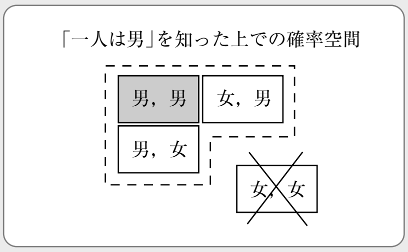

図2　新しい確率空間

情報の正しい解釈

Aさんは旅行中に運悪く盗賊に捕まりました．盗賊の一人がAさんに対し，「今から特別なロシアンルーレットをやろう．うまく行けば君は自由になる（もちろん，うまくいかなければ死にます）」と言いました．盗賊が銃弾が6個入る回転式拳銃と弾を二つ取出して，隣り合った二つの穴に弾を入れ，回転装置を無雑作に回した後に空に向けて銃を撃ったところ，弾は出ませんでした．盗賊はAさんに言いました，「今度は君の番だ，銃を頭に向けて撃ってくれ．不発であれば，君は自由だ．でもその前に君に選択を与える．君が望むのであれば，撃つ前に回転装置をもう一回私が無雑作に回しても良い」．Aさんは拳銃には6個のうち，隣り合った二つの穴のみに弾が入っていることと，時計回りに拳銃の回転装置が動くことがわかっています．助かりたいAさんはそのまま銃を撃つべきか，それとも一回無雑作に回転装置を回してもらった方がよいかを考えます．Aさんは助かる確率の高い選択をしたいので以下のように考えました．まず，盗賊が拳銃を撃つ前には，拳銃には6個の穴のうち2個しか弾が入っていないので，ランダムにまわした後に撃つ場合，助かる確率は2/3になる．ところが，盗賊が空に向かって撃ったときに不発だったので，空の穴が一つ“なくなった”と考えてもよい．つまり，次に撃つとき，助かる可能性は3/5となる．3/5は2/3より小さいので，拳銃をもう一度ランダムに回し，元の状態に戻した方が助かる確率が高いと考えました．このAさんの考えは一見正しいのですが，情報を有効的に解釈できなかった結果，Aさんは誤った確率を算出しました．Aさんが持っている情報を整理しましょう．Aさんは**図3**に示すように，銃の回転装置の6個中二つの隣り合った二つの穴のみに弾が入っていて，回転方向は時計回りという事実は知っています．簡単のため，弾は1番と2番目の穴にあり，残りは空としましょう．そこで，盗賊が撃ったときに不発である情報は非常に重要です．Aさんは，1回目に撃って不発の後に2回目に撃ったときも不発である確率を計算しなければなりません．これはまさに条件付確率です（1回不発という条件下で次も不発である確率）．そのためには，**図4**に示す確率空間を考える必要があります．この図から，不発の後に再び不発となるケースは3回あるのに対し，不発の直後に弾があるケースは1回しかありません（1回目は不発という条件のみを考慮すればよいので，〔弾→弾〕または〔弾→空〕は確率空間から排除できます）．つまり，不発の後に再び不発となる確率は3/4です．これは初期確率の2/3より大きいので，そのまま銃を撃った方が助かる確率が高くなります．

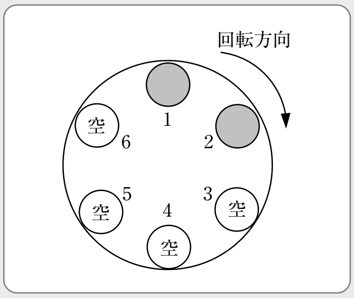

図3　回転式銃の様子

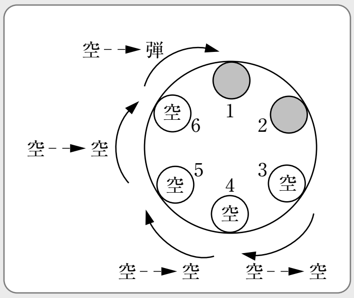

図4　“不発”後の確率空間

むすび

本稿では厳密的な数学を避け，例を用いて直感的にベイズの定理の説明を試みましたが，やはり最後はベイズの定理の数式を記述しなければなりません．一般的に，事象Bが起きた上で事象Aが起きる確率を$P(A|B)$と記述し，次の式に従い計算できます．

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ここでは，$P(A\cap B)$と$P(B)$はそれぞれ事象AとBが同時に起きる確率と事象Bが起きる確率を示します．上の式の詳細は省略しますが，$P(B)$が式の分母となることは，事象Bが起きた結果，Bを含む確率空間のみを考えれば良いという意味を直感的に理解できれば，詳細な証明を導くための大きな手助けとなるでしょう．

また，ベイズの定理に基づいた推定方法をベイズ推定と言います．ベイズ推定は機械学習やパターン認識の多くの手法の基礎原理となるため，これらの分野ではベイズの定理は最も重要な概念の一つと言えます．

（2008年10月6日受付）

参　考　文　献

1）市川伸一：“確率の理解を探る”，共立出版（1998）
2）伊庭幸人：“ベイズ統計と統計物理”，岩波書店（2003）
3）L. Mlodinow: "The Drunkard's Walk", Pantheon Book（2008）
4）W. Poundstone: "How Would You Move Mount Fuji?", Little Brown & Co（2004）

ピトヨ ハルトノ　2002年，早稲田大学理工学研究科博士課程修了．1995年，（株）日立製作所入社．2001年，早稲田大学理工学総合研究センター助手．2003年，早稲田大学総合研究機構客員講師．2005年より，公立はこだて未来大学准教授．機械学習と進化的計算法の研究に従事．博士（工学）．

キーワード募集中

この企画で解説して欲しいキーワードを会員の皆様から募集します．ホームページ（http://www.ite.or.jp）の会員の声より入力可能です．また電子メール（ite@ite.or.jp），FAX（03-3432-4675）等でも受け付けますので，是非，編集部までお寄せください．

（編集委員会）