

知っておきたいキーワード

カルマンフィルタ ～BPとしての解釈～

(正会員) 田川 憲 男[†]

[†] 首都大学東京 システムデザイン学部

"Kalman Filter" by Norio Tagawa (Faculty of System Design, Tokyo Metropolitan University, Tokyo)

キーワード：グラフィカルモデル，ベイジアンネットワーク，確率伝搬

同時確率からの効率的な確率計算

本稿では、ダイナミックな過程に対する信号処理手法として有名なカルマンフィルタを、Belief Propagation (BP: 確率伝搬)²⁾の一例として解説したいと思います。そこでまず、BPについて簡単に説明します。昨今の計算機の高性能化により、多くの確率変数によってモデル化される問題が多岐の分野で扱われるようになりました。各変数間には通常、確率的依存関係があるため、これをグラフ構造で表現するグラフィカルモデリングが便利です。グラフィカルモデルでは、各確率変数をノードで表します。図1 (a)の無向独立グラフにおけるノード間を結ぶ辺は、それ以外の確率変数の値を固定したときに、辺でつながる変数が独立ではない(条件付独立ではない)ことを表します。一方、図1 (b)では、辺に向きがあり(矢印)、すべての変数の同時の確率関数(あるいは確率密度関数) $f(x_1, x_2, \dots, x_7)$ が、式(1)のように逐次的に分解できることを意味しています。

有効独立グラフはベイジアンネットワークとも呼ばれます。有向独立グラ

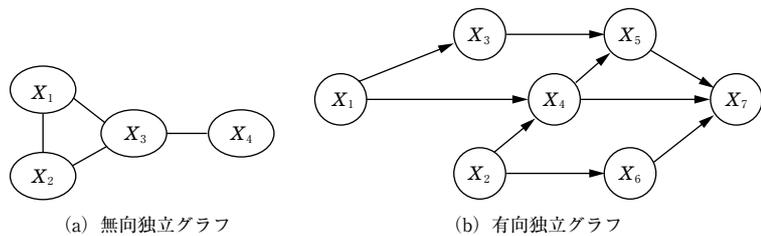


図1 グラフィカルモデル(独立グラフ)の例¹⁾

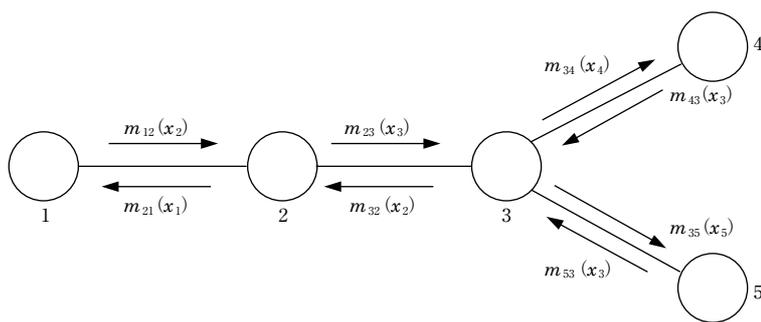


図2 メッセージの伝搬による確率計算の例

$$f(x_1, x_2, \dots, x_7) = f(x_7 | x_4, x_5, x_6) f(x_6 | x_2) f(x_5 | x_3, x_4) f(x_4 | x_1, x_2) f(x_3 | x_1) f(x_2) f(x_1) \quad (1)$$

フから無向独立グラフへの変換は、簡単なルールに基づいて行えますので、本稿では無向独立グラフを考えます。特に、確率変数が2個ずつ辺で結ばれている場合(Pairwise MRF)を想定し

ます。

今、図2に示すような無向独立グラフを考えます。ただし、各ノード(確率変数 x_i を表す)にはその観測量 y_i が付随しているとします

☞ (図の中では省略しています)。すべての x_i の同時確率が式 (2) で表されるとします。

このとき、各変数 x_i のみの確率 (周辺確率) $b(x_i)$ は式 (3) のように、その変数の周りのノードからのメッセージ $m_{ji}(x_i)$ を用いて計算できます³⁾。ただし、 k は正規化定数です。

メッセージは周辺から伝搬してきますので、式(4)のように更新されます³⁾。ここで、 $k \in N(i) \setminus j$ は i のまわりのノードからノード j を除いたものという意味です。このような計算法がBPであり、式 (4) からわかるように、

周辺化操作 (x_i に関する総和) が必要な箇所ごとに分離されて行われるため、式 (2) において、確率を求めたい変数 x_i 以外の変数に関して一斉に周辺化するのに比べて、非常に効率的です。そして、この計算法は、ループ (ある

ノードから辺をたどってそのノードに戻る道) がない場合には、正しい確率が得られこと、また、ループがあっても近似値が計算できることがわかっています。

$$p(\{x\}) = \frac{1}{Z} \prod_{(ij)} \phi_{ij}(x_i, x_j) \prod_i \phi_i(x_i) \quad (\text{ただし } \phi_i(x_i, y_i) \text{ を } \phi_i(x_i) \text{ と略記}) \quad (2)$$

$$b_i(x_i) = k \phi_i(x_i) \prod_{j \in N(i)} m_{ji}(x_i) \quad (3)$$

$$m_{ij}(x_j) \leftarrow \sum_{x_i} \phi_i(x_i) \phi_{ij}(x_i, x_j) \prod_{k \in N(i) \setminus j} m_{ki}(x_i) \quad (4)$$

カルマンフィルタのBPとしての解釈

それでは以上に基づいて、カルマンフィルタがBPの一例であることを解説します。図3に示すように、状態 x_i (一般には各時刻における未知量) の遷移を表現する状態方程式と、観測量と状態の関係を表す観測方程式の双方が、問題に応じて与えられます。ここで、 n で表現されているのは確率的な揺らぎ (誤差や雑音) で、狭義のカルマンフィルタでは正規分布に従うものと仮定されます。カルマンフィルタで扱うモデルはベイジアンネットワークとして自然に表現されますが、これはそのまま無向独立グラフに読み替えることができます。そして、状態と観測量の同時確率も、図3の中に示したように書くことができます。なお、 x_0 は初期状態です。このグラフィカルモデルにおいて、カルマンフィルタで求めたいのは、 y_1 から y_3 までを観測したときの x_3 の確率 $b(x_3)$ です。式 (1) から式 (3) の表記に合わせるため、式 (5) のように定義します。すると、式 (3) の具体化として式 (6) が得られ、 x_2 から x_3 へのメッセージ $m_{23}(x_3)$ (図4 (a) 参照) に新たな観測 y_3 の情報を積として合わせたものとなっていることがわかります。この $m_{23}(x_3)$ は式 (4) (メッセージの更新) の具体化として式 (7) で計算されます。

式 (4) の総和計算が上式で積分に置き換わっているのは、ここでは x_2 を連

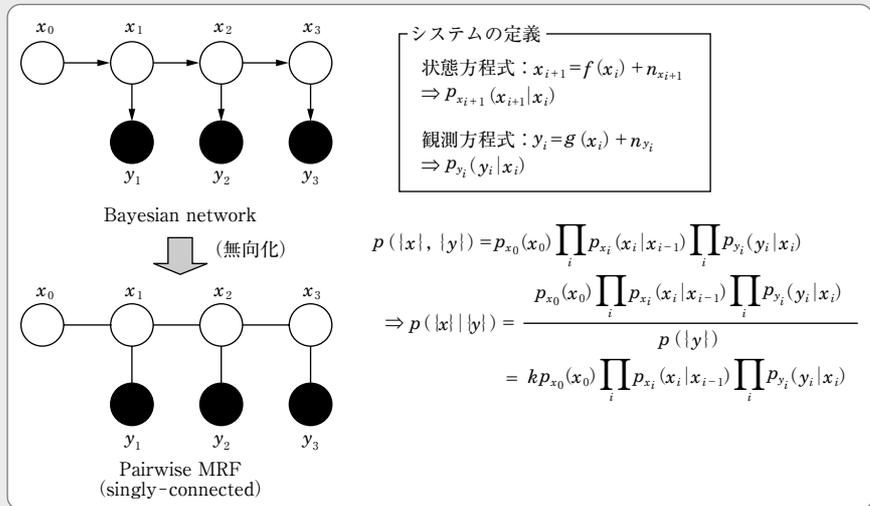


図3 カルマンフィルタに対応するグラフィカルモデル

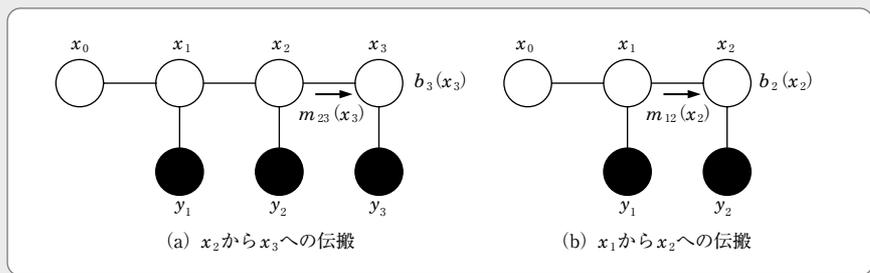


図4 カルマンフィルタにおけるメッセージ伝搬

$$\phi_{i+1}(x_i, x_{i+1}) \equiv p_{x_{i+1}}(x_{i+1} | x_i) \quad (5)$$

$$\phi_i(x_i) \equiv p_{y_i}(y_i | x_i) \quad (5)$$

$$b_3(x_3) = p(x_3 | y_1, y_2, y_3) = k p_{y_3}(y_3 | x_3) m_{23}(x_3) \quad (6)$$

$$m_{23}(x_3) = \int p_{y_2}(y_2 | x_2) p_{x_3}(x_3 | x_2) m_{12}(x_2) dx_2 \quad (7)$$

続量としているためです。一つ前の時刻のモデルである図4 (b) を考えます

と、式 (6) の一時刻前に相当する式 (8) が得られ、これを ☞

式 (7) に代入することで、式 (7) のメッセージ $m_{23}(x_3)$ は式 (9) であること、すなわち、観測 $\{y_1, y_2\}$ から計算される x_3 の予測情報に相当する量であることがわかります。

$$b'_2(x_2) = p(x_2 | y_1, y_2) = k p_{y_2}(y_2 | x_2) m_{12}(x_2) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} m_{23}(x_3) &= k \int p_{x_3}(x_3 | x_2) b'_2(x_2) dx_2 \\ &= k \int p_{x_3}(x_3 | x_2) p(x_2 | y_1, y_2) dx_2 \\ &= k p(x_3 | y_1, y_2) \end{aligned} \quad (9)$$

むすび

以上のように、カルマンフィルタとは、逐次的にノードを追加しながら、以前の観測からの予測情報をメッセージとして伝えるBPであることがわかります。また、このメッセージは、ノードの1個少ない状態（通常は1時刻前の状態）の出力（図4 (b) での $b_2(x_2)$ = $p(x_2 | y_1, y_2)$ ）とノード間の遷移具

合を表す条件付確率 $p_{x_3}(x_3 | x_2)$ を用いた自然な形で計算されます（式 (9)）。状態方程式と観測方程式に加わる雑音成分が正規分布であり、両方程式における関数 $f()$ 、 $g()$ が線形であれば、一般の教科書に書かれているように、式 (6) や式 (7) は解析的に求まります（本稿では省略しますが）、そうでなくても上記の解釈は広い意味でのカルマンフィルタとして、さまざまな問題

を見通し良く解くために役立つと思います。ちなみに図5は、私たちの研究室でカルマンフィルタを運動立体視に適用した際の結果（対象物の奥行き復元結果）です⁴⁾。この問題では、時間方向ではなく解像度方向に逐次的ノード追加を行っています。

(2013年1月28日受付)

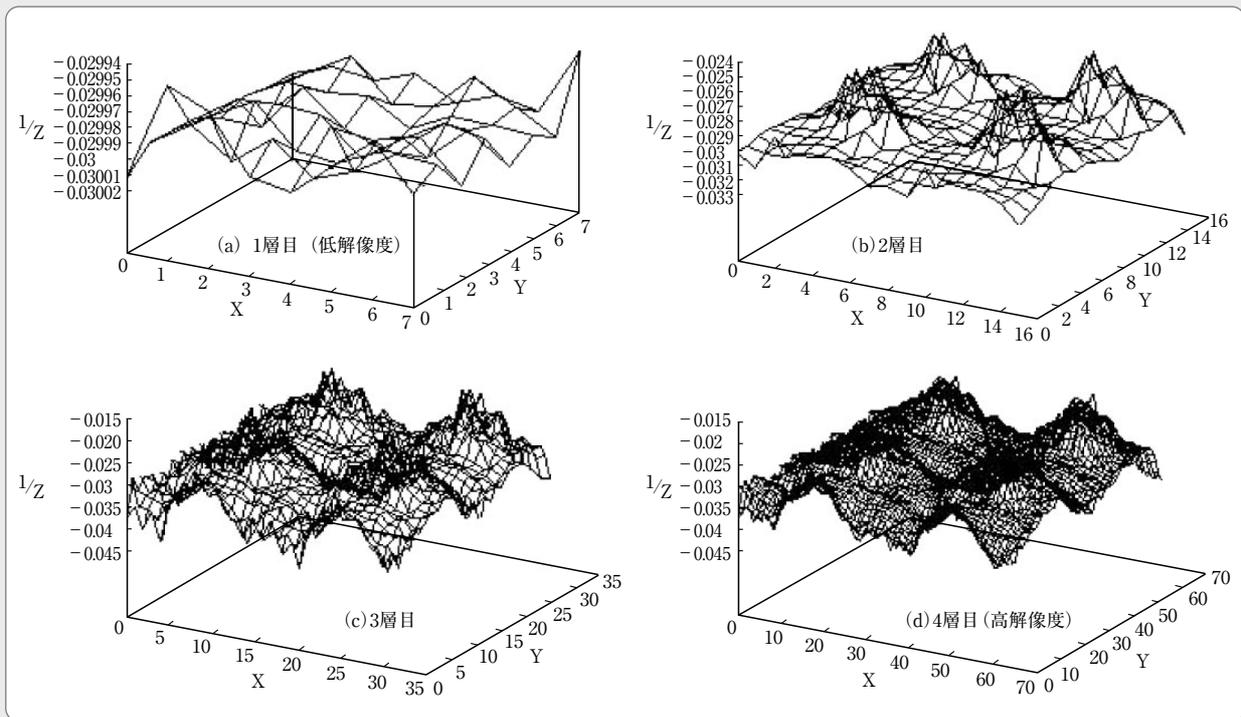


図5 運動立体視による奥行き復元問題にカルマンフィルタを適用した例⁴⁾

参考文献

- 1) 宮川雅巳：“グラフィカルモデリング”，浅倉書店（1997）
- 2) M.I. Jordan: "Learning in Graphical Models", Kluwer Academic Publishers (1998)
- 3) J.S. Yedidia, W.T. Freeman, Y. Weiss: "Understanding Belief Propagation and its Generalizations", Mitsubishi Electric Research Laboratories TR-2001-22 (2002)
- 4) N. Tagawa, J. Kawaguchi, S. Naganuma, K. Okubo: "Direct 3-D Recovery from Image Sequence Based on Multi-scale Bayesian Network", Proc. ICPR, CD-ROM (2008)



田川 憲男 1989年、東京工業大学大学院総合理工学研究科修士課程修了。同年、(株)富士通研究所入社。1992年、東京都立大学工学部電気工学科助手。現在、首都大学東京システムデザイン学部教授。コンピュータビジョン、医用超音波工学の研究に従事。博士(工学)。正会員。