

# 多角形境界の図形的性質に基づいて全面投影を保証する 複数台プロジェクタ配置の最適化

西村 純, 橋本 直己

概要 複数のプロジェクターによる広域投影では、壁面に予め設定された画像投影領域内に非投影領域(NPA)が存在するため、没入体験が著しく劣化する。そこで、NPAを完全に排除する、つまり画像投影領域を完全にカバーするような最適なマルチプロジェクタ配置を確実に得るための新しい方法を提案する。詳細には、提案手法には、A) 多角形の境界の交点を特定することで実現可能性(NPAが存在するかどうか)を決定する方法、B) 非投影比(NPR)を最小化することで初期実現可能解(NPAを持たない配置)を計算する方法が含まれる。さらに、提案手法によって計算されたすべての最適解が実現可能であることを実験的に確認した。

キーワード：非投影領域、非投影割合、交点、実行可能性、広域投影

## 1. まえがき

空間拡張現実(Spatial Augmented Reality: SAR)は、画像に投影することで、物体の外観をリアルに変化させる没入型技術である。特に、壁面の広い範囲に画像を投影することで、あたかも実際に別の場所を訪れたかのように、没入感のある体験を見ることができる。しかし、対象投影領域の大きさによっては、1台のプロジェクターでは全領域をカバーできないことがある。このような場合、複数のプロジェクタで単一の合成画像を投影することは、“Wide-Area Projection”<sup>1)</sup> として知られる有用な方法である。

広域投影では、壁面に予め設定された画像投影領域内に非投影領域(NPA)が存在しないことが非常に重要である。なぜなら、NPAが存在すると投影画像に「黒い斑点」が現れ、没入体験が著しく劣化するからである。

しかし、実空間において、NPAのない複数のプロジェクターの配置を決定するには、多くの時間と労力が必要である。もちろん、最も簡単な方法は、壁面をまっすぐに向いたプロジェクターをタイル状に並べることであるが、プロジェクターの固定可能な位置に制約があるため、これは通常非現実的である。

例えば、天井の下に装備され、壁に平行なレールにプロジェクターを固定しようとする場合、次の作業を何度も繰り返す必要があります：(a)レール上の各プロジェクターをどこに固定するかを決める、(b)各プロジェクターの姿勢を調整する、(c)NPAが存在するかどうかを目視で確認する。

手配を決定する作業負担を軽減するために考えられる解決策の1つは、複数のプロジェクターを実空間に配置しようとする人々に、仮想空間でシミュレートされた様々な手配の中から最適な手配情報を提供することである。

しかし、最適なマルチプロジェクタ配置を計算する分野で、NPAの完全排除に焦点を当てた先行技術は知られていない。そこで、特に多角形の境界の交点に注目し、NPAを完全に排除する、つまり画像投影領域を完全にカバーするような最適なマルチプロジェクタ配置を確実に得るための新しい方法を提案する。

## 2. 関連研究

本節では、最適なマルチプロジェクタ配置を計算する分野で知られている先行技術について概説する。

島津ら<sup>2)</sup>と松村ら<sup>3)</sup>は、3D物体表面への投影下で画素密度を最大化することで配置を計算した。画素密度がゼロの「シャドウエリア」を最小化するために、島津ら<sup>2)</sup>は単に平均画素密度を評価するのではなく、「目標画素密度」という指標を評価関数に組み込み、

Received April 26, 2025; Revised July 13, 2025; Accepted August 14, 2025

† The University of Electro-Communications  
(Tokyo, Japan)

†† Japan Patent Office  
(Tokyo, Japan)

【機械翻訳コンテンツの著作権について】

当サイトに掲載されている原著論文の著作権は映像情報メディア学会に帰属します。原著論文および翻訳論文の無断使用は禁止します。  
引用の際には、必ず原著論文の書誌情報をご記載ください。詳細は映像情報メディア学会著作権規定をご覧ください。

# Multi-projector arrangement optimization ensuring full coverage based on diagrammatic nature of polygonal boundaries

Jun Nishimura <sup>†,††</sup>, Naoki Hashimoto (member)<sup>†</sup>

**Abstract** In Wide-Area Projection with multiple projectors, the existence of Non-Projected Areas (NPAs) inside the image projection area preset on a wall surface significantly degrades immersive experience. Therefore, we propose a novel method to certainly obtain the optimal multi-projector arrangements so that NPAs are excluded completely, that is, the image projection area is entirely covered. In detail, the proposed method includes A) the method to determine feasibility (whether NPAs exist or not) by identifying intersections of polygonal boundaries, and B) the method to compute an initial feasible solution (an arrangement with no NPAs) by minimizing Non-Projection Ratio (NPR). Furthermore, we experimentally confirmed that all optimal solutions computed by the proposed method were feasible.

**Key words:** Non-Projected Area, Non-Projection Ratio, intersections, feasibility, Wide-Area Projection.

## 1. Introduction

Spatial Augmented Reality (SAR) is an immersive technology that modifies the appearance of an object realistically by projecting an image onto it. Particularly, projecting an image onto a wide area of a wall surface can provide viewers with an immersive experience as if they actually visit another place. However, depending on the size of the target projection area, a single projector sometimes cannot cover the entire area. In such cases, projecting a single combined image by multiple projectors is a useful way, which is known as “Wide-Area Projection”<sup>1)</sup>.

In Wide-Area Projection, it is very important that Non-Projected Areas (NPAs) do not exist inside the image projection area preset on a wall surface, because the existence of NPAs results in “black spots” appearing in the projected image and significantly degrades the immersive experience.

However, determining arrangements of multiple projectors with no NPAs in real space requires a great deal of time and effort. Of course, the simplest way is to arrange projectors facing straight the wall in a tiled pattern, but this is usually impractical because of the constraints on the fixable positions of the projectors.

For example, if you attempt to fix projectors to a rail equipped beneath a ceiling and being parallel to the wall, you need to iterate the following tasks again and again: (a) determine where to fix each projector on the rail, (b) adjust a posture of each projector, (c) check with eyes whether NPAs exist or not.

One of the conceivable solutions to reduce the workload of determining the arrangements is to provide the best arrangement information among various arrangements simulated in virtual space for those who attempt to arrange multiple projectors in real space.

However, there is no known prior art focusing on complete exclusion of NPAs in the field of computing optimal multi-projector arrangements. Therefore, we particularly focus on intersections of polygonal boundaries, and propose a novel method to certainly obtain the optimal multi-projector arrangements so that NPAs are excluded completely, that is, the image projection area is entirely covered.

## 2. Related Work

This section outlines prior arts known in the field of computing optimal multi-projector arrangements.

Shimazu et al.<sup>2)</sup> and Matsumura et al.<sup>3)</sup> computed the arrangements by maximizing pixel density under the projection onto a 3D object’s surface. In order to minimize “Shadow Area” where pixel density is zero, Shimazu et al.<sup>2)</sup> incorporated the indicator “target pixel density” into the evaluation function instead of simply evaluating the average pixel density, and Matsumura

Received April 26, 2025; Revised July 13, 2025; Accepted August 14, 2025

<sup>†</sup> The University of Electro-Communications  
(Tokyo, Japan)

<sup>††</sup> Japan Patent Office  
(Tokyo, Japan)

松村ら<sup>3)</sup>は3次元物体を複数のパーツに分割し、各プロジェクタを各パーツの中心に向けた。しかし、両論文とも「シャドウエリア」は縮小されたが、依然として残っていると報告している。

青木ら<sup>4)</sup>は、平面または互いに接続された平面の壁面への投影の下で、3つの指標(画素密度、焦点ぼかしの程度、「シャドウ領域」の大きさ)を用いた多目的最適化によって配置を計算した。しかし、実験結果は、いくつかの最終出力がNPAを含んでいることを示している。

Liら<sup>5)6)</sup>は、円筒スクリーンへの解像度とプロジェクタとスクリーン間の距離に関連する4つの指標を含む評価関数を最小化することにより、配置を計算した。NPAの出現を防ぐため、各プロジェクタに対応するサンプリングポイントを画面上に設定し、各サンプリングポイントがどのプロジェクタからも照らされていない場合に、評価機能が大きな値に割り当てられるように設計されている。しかし、この方法では、各プロジェクタに対応する画面上の投影領域を手動でプリセットする必要がある。

小林<sup>7)</sup>は、曲面または平面スクリーンへの投影の下で、3つの指標(解像度、輝度、交差)を含む評価関数を最大化することにより、配置を計算した。しかし、この芸術では、NPAには特に配慮はなされていない。

平木ら<sup>8)</sup>とLawら<sup>9)</sup>は、マルチプロジェクタ配置最適化と視点計画(例えば、アートギャラリー問題)の類似性に注目した。しかし、平木ら<sup>8)</sup>は配置候補のみを計算し、配置そのものは計算せず、Lawら<sup>9)</sup>は評価関数に指標「2値視認項」を組み込んだが、物体の表面全体の視認性、すなわちNPAの非存在については言及されていない。

要約すると、NPAを最小化する方法や、手動でプリセットした投影領域の下でNPAを除外する方法は既に知られているが、手動でプリセットするステップを行わずにNPAを完全に除外する方法は今のところ知られていない。

### 3. 本研究における最適化問題

#### 3.1 問題の定式化

##### (1) 変数

上記のart<sup>2)-9)</sup>では、各プロジェクタの光源自体の位置と姿勢を変数として用いたが、本研究では、代わりに各プロジェクタの各固定具の位置とその固定角度を変数として用いる。

これは、複数のプロジェクタを実空間に配置しようとする人は、おそらく固定ツールによって固定するものであり、各ツールは固定角度をそれぞれ調整可能な複数の関節を持つため、固定ツールを考慮することで最適化問題をより現実的にすることができからである。

$p_n \in R^3$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) をパン回転関節の位置とし、 $\theta_n^p$ ,  $\theta_n^t$ ,  $\theta_n^r$  をパン/チルト/ロール回転関節の固定角とする( $N$ はプロジェクタの数)(図1参照)。また、変数  $x_n = \{p_n, \theta_n^p, \theta_n^t, \theta_n^r\}$  と項  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  を解と定義する。したがって、光源  $s_n \in R^3$  の位置は次式で表される。

$$s_n = p_n + R_y(\theta_n^p) r_{p2t} + R_x(\theta_n^t) R_y(\theta_n^r) r_{t2r}$$

$z_n$   $x_n$   $y_n$   $r_{2s}$  ここで、 $R_x(-)$ ,  $R_y(-)$ ,  $R_z(-)$  は  $x$ ,  $y$ ,  $z$  軸に関する回転行列、 $r_{a2b} \in R^3$  は基準点  $a$  からの点  $b$  の相対位置ベクトルを表す。

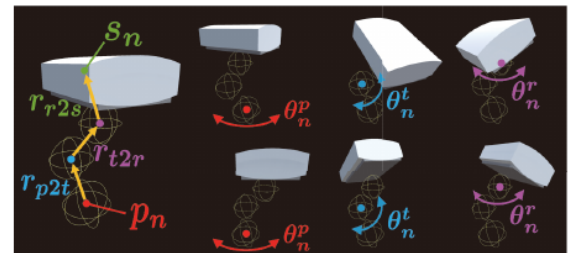


Fig. 1 各プロジェクタの固定ツール

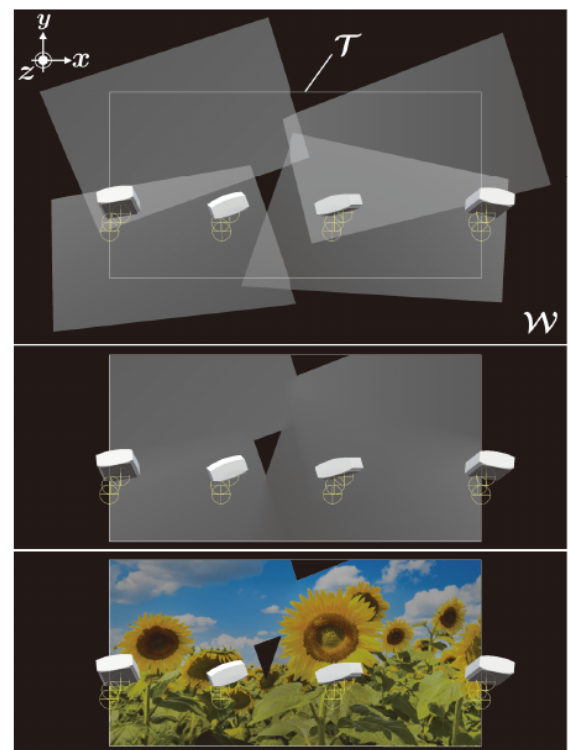


Fig. 2 実行不可能な解の例;(上)「強度のブレンド」前、(中)「強度のブレンド」後、(下)画像全体の投影。

et al.<sup>3)</sup> divided a 3D object into multiple parts and directed each projector towards the center of each part. However, both papers reported that “Shadow Area” was reduced but still remained.

Aoki et al.<sup>4)</sup> computed the arrangements by multi-objective optimization with 3 indicators (pixel density, degree of focal blur, size of “Shadow Area”) under the projection onto the wall surface of a plane or planes connected with each other. However, the experimental result shows that some final outputs included NPAs.

Li et al.<sup>5)6)</sup> computed the arrangements by minimizing the evaluation function including 4 indicators related to the resolution on a cylindrical screen and the distance between projectors and the screen. In order to prevent NPAs appearing, sampling points corresponding to each projector are set on the screen, and the evaluation function is designed to be assigned to a huge value when each sampling point is not illuminated by any projector. In this method, however, the projection area on the screen corresponding to each projector must be preset manually.

Kobayashi<sup>7)</sup> computed the arrangements by maximizing the evaluation function including 3 indicators (resolution, luminance, crossing) under the projection onto a curved or planar screen. However, no particular consideration was given to NPAs in this art.

Hiraki et al.<sup>8)</sup> and Law et al.<sup>9)</sup> focused on the similarity between multi-projector arrangement optimization and viewpoint planning (e.g., art gallery problem). However, Hiraki et al.<sup>8)</sup> computed only candidate arrangements, not arrangements themselves, and Law et al.<sup>9)</sup> incorporated the indicator “binary visibility term” into the evaluation function, but there is no mention about visibility of the entire surface of objects, i.e., non-existence of NPAs.

In summary, the method to minimize NPAs or the method to exclude NPAs under the manually preset projection areas are already known, but the method to achieve complete exclusion of NPAs with no manually presetting step is not known so far.

### 3. Optimization Problem in This Study

#### 3.1 Problem Formulation

##### (1) Variables

In the above arts<sup>2)-9)</sup>, a position and a posture of each projector’s light source themselves were used as variables, but in this study, a position of each fixing tool for each projector and its fixing angles are used as

variables instead. This is because those who attempt to arrange multiple projectors in real space probably fix them by fixing tools, each of which has multiple joints with their fixing angles adjustable respectively, hence considering fixing tools should make the optimization problem more realistic.

Let  $p_n \in \mathbb{R}^3$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) be the position of a pan rotation joint, and  $\theta_n^p, \theta_n^t, \theta_n^r$  be the fixing angles of pan/tilt/roll rotation joints, where  $N$  is the number of projectors (see Fig.1). Besides, we define a variable  $x_n = \{p_n, \theta_n^p, \theta_n^t, \theta_n^r\}$  and term  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  a solution. Thus, the position of a light source  $s_n \in \mathbb{R}^3$  is expressed as

$$s_n = p_n + R_y(\theta_n^p) r_{p2t} + R_x(\theta_n^t) R_y(\theta_n^p) r_{t2r} \\ + R_z(\theta_n^r) R_x(\theta_n^t) R_y(\theta_n^p) r_{r2s},$$

where  $R_x(\cdot), R_y(\cdot), R_z(\cdot)$  denote rotation matrices about  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -axis,  $r_{a2b} \in \mathbb{R}^3$  denotes the relative position vector of a point  $b$  from a point  $a$  in the reference

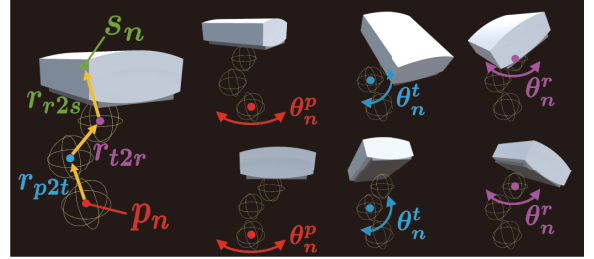


Fig. 1 Fixing tool for each projector.

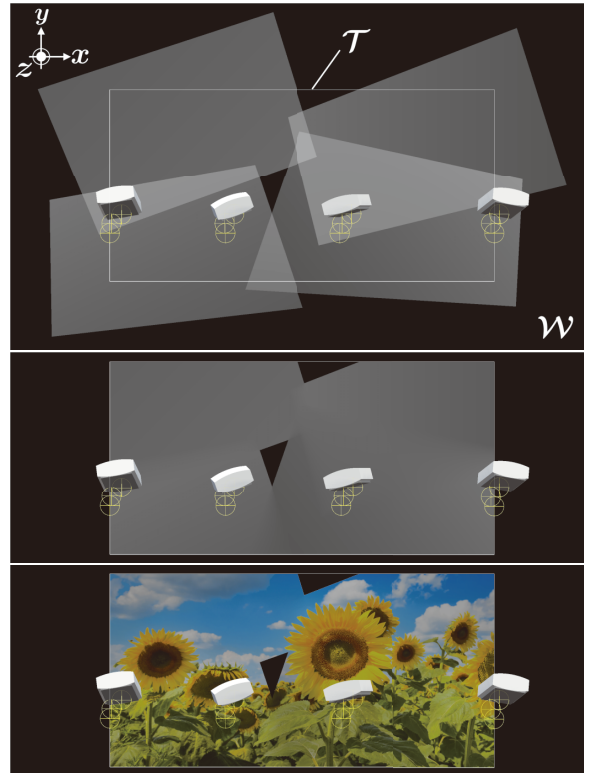


Fig. 2 Example of an infeasible solution; (Top) Before “Intensity Blending”, (Middle) After “Intensity Blending”, (Bottom) Whole image projection.

投影状態 ( $\theta_n^p = \theta_n^t = \theta_n^r = 0$ )、 $p$ 、 $t$ 、 $r$ はそれぞれパン/チルト/ロール回転関節、 $s$ は光源を表す。

## (2) 制約条件

平面壁面 $W$ 上に多角形の目標投影面積 $T$ が設定されていると仮定し(図2の上段参照)、最適な配置を計算するための制約条件として、 $T$ 内部にNPAが存在しないことを定義している。

最適化の分野では、制約条件を満たす解は一般に実行可能解と呼ばれ、それ以外は実行不可能解と呼ばれる。以下、 $F$ は実行可能解の集合を表す。

図2は実行不可能な解の例である。詳細には、オーバーラップ投影領域の輝度を調整する "Intensity Blending"<sup>10)</sup> を行う前/後の投影と、画像全体の投影を図2に示す。図2からわかるように、NPAは投影画像に「黒い斑点」として表示される。

## 3.2 最適化フレームワーク

各プロジェクタ配置は6つの連続変数( $p_n$ と $\theta_n^p$ の $x$ 、 $y$ 、 $z$ 成分、 $\theta_n^t$ 、 $\theta_n^r$ )で表され、マルチプロジェクタ配置は $6 \times N$ の連続変数で表されるため、マルチプロジェクタ配置は無限に存在する。しかし、本研究では、問題を単純化するために、すべての変数が離散的であるという前提のもと、有限個の配置のみを考慮した。有限であるにもかかわらず、膨大な数の変数の組み合わせ(6.1 (2) と表1を参照)があることに注意してください。

各変数が離散的であるような問題は「組合せ最適化問題」と呼ばれ、局所探索アルゴリズム(LSA)はこれらの問題に適用される最も基本的な方法である。しかし、LSAを単純に適用すると、近傍により良い解が存在するにもかかわらず、局所最適で停止してしまうことが多いため、この欠点を克服するために様々な方法が提案されている。本研究では、LSAを複数回実行した結果の中から最適な局所最適を選択する「マルチスタート」アプローチと呼ばれる最も単純な手法の採用を試みた(6.3 (2) 参照)。

LSAは、あらかじめ設定された近傍領域 $N(x) \sim F$ の下で目的関数 $f(x)$ を最小化する方法であり、解から少し修正された解の集合である

$x$ 。より詳細には

- 初期実行可能解  $x \in F$  を計算する、
- を満たす改善解  $x \in N(x)$  に移動する。  
 $f(x') < f(x)$ ,
- 改善された解がなくなるまで(b)のステップを繰り返す。

found.

本研究では、 $N(x)$  を、 $x \in F$  の条件下で、 $N$  個のプロジェクタから選択されたプロジェクタの上記 6 変数のうち、少なくとも 1 変数をわずかに修正するものと定義する。目的関数 $f(x)$ の詳細は5.7で説明されていることに注意。

この問題でLSAを行うためには、以下の2つの方法を特定する必要がある:

- 実現可能性を判断する方法(NPAが存在するかどうか)、
  - 初期実行可能解を計算する方法。
- しかし、A)については、第2節で述べたように、NP Aの完全排除に焦点を当てた既知の先行技術がないため、この問題でNPAが存在するか否かを決定する条件は明らかにされていない。また、B)に関しては、この問題では初期実行可能解そのものを見つけることが困難である(6.2参照)ので、それを見つけるための新しい方法を考案する必要がある。

## 4. 提案手法

### 4.1 実現可能性の決定

提案手法は以下の通りである:

- $x_n$ に割り当てられた値から、各投影領域の4頂点の座標を計算する(5.1参照)、
- ステップ(a)で計算された座標から、エッジ交差(EI)、外側エッジ交差(OEI)、外側交差(OI)を計算します(5.2参照)、
- 以下の3つの条件をすべて満たす場合、NPAは存在しないと判断し、そうでない場合、NPAが存在すると判断する:
  - EIs exist,
  - No OEI exists,
  - $T$ 内部にOIは存在しない。

例えば、図3に示す3つの配置について、(A)は上記3つの条件をすべて満たすので実行可能解と判定され、(B)は条件(ii),(iii)を満たさないで実行不可能解と判定され、(C)は条件(i)を満たさないで実行不可能解と判定される。

### 4.2 初期実現可能解の計算

提案手法は以下の通りである:

- 初期ランダム解を生成する、
- LSAによる非投影比(5.6参照)の最小化、
- ステップ(a),(b)を、ステップ(b)の結果、実行可能解が得られるまで繰り返す。

なお、ステップ(b)のLSAでは、3.2で説明したアルゴリズムとは異なり、条件 $x \in F$ を削除する。

[機械翻訳コンテンツの著作権について]

当サイトに掲載されている原著論文の著作権は映像情報メディア学会に帰属します。原著論文および翻訳論文の無断使用は禁止します。  
引用の際には、必ず原著論文の書誌情報をご記載ください。詳細は映像情報メディア学会著作権規定をご覧ください。

projection state ( $\theta_n^p = \theta_n^t = \theta_n^r = 0$ ),  $p, t, r$  denote a pan/tilt/roll rotation joint respectively, and  $s$  denotes a light source.

## (2) Constraints

We assume that a polygonal target projection area  $\mathcal{T}$  is set on a planar wall surface  $\mathcal{W}$  (see the top of Fig.2), and define non-existence of NPAs inside  $\mathcal{T}$  as a constraint on computing the optimal arrangements.

In the field of optimization, solutions satisfying constraints are generally called feasible solutions, otherwise called infeasible solutions. Hereinafter,  $\mathcal{F}$  denotes the set of feasible solutions.

Fig.2 shows an example of an infeasible solution. In detail, the projection before/after performing “Intensity Blending”<sup>10)</sup>, which adjusts the luminance of overlap projection areas, and whole image projection are shown in Fig.2. As can be seen in Fig.2, NPAs appear as “black spots” in the projected image.

## 3.2 Optimization Framework

There are an infinite number of multi-projector arrangements, because each projector placement is represented by 6 continuous variables ( $x$ -,  $y$ -,  $z$ -components of  $p_n$  and  $\theta_n^p, \theta_n^t, \theta_n^r$ ), and the multi-projector arrangements is represented by  $6 \times N$  continuous variables. In this study, however, to simplify the problem, we considered only a finite number of arrangements under the presupposition that all variables are discrete. Note that there are an enormous number of variable combinations (see 6.1 (2) and Table 1) despite the finite number.

Such problems that each variable is discrete are known as “combinatorial optimization problems”, and Local Search Algorithm (LSA) is the most basic method applied to these problems. However, simple application of LSA often results in stopping at a local optimum despite the existence of better solutions nearby, thus various methods have been proposed to overcome this drawback. In this study, we attempted to adopt the simplest method among them called “multi-start” approach, which selects the best local optimum among the results of multiple runs of LSA (see 6.3 (2)).

LSA is the method to minimize an objective function  $f(x)$  under the preset neighborhood  $N(x) \subset \mathcal{F}$  which is the set of slightly modified solutions from a solution  $x$ . In more detail,

- (a) Compute an initial feasible solution  $x \in \mathcal{F}$ ,
- (b) Move to the improved solution  $x' \in N(x)$  satisfying  $f(x') < f(x)$ ,
- (c) Repeat step (b) until no improved solution is

found.

In this study, we define  $N(x)$  as slightly modifying at least one variable among the above 6 variables of a projector selected from  $N$  projectors, under the condition of  $x \in \mathcal{F}$ . Note that the detail of the objective function  $f(x)$  is described in 5.7.

In order to perform LSA in this problem, the following 2 methods must be identified:

- A) Method to determine feasibility (whether NPAs exist or not),
- B) Method to compute an initial feasible solution.

Regarding A), however, as discussed in section 2, there is no known prior art focusing on complete exclusion of NPAs, thus the conditions for determining whether NPAs exist or not in this problem have not been clarified. Besides, regarding B), finding an initial feasible solution itself is difficult in this problem (see 6.2), thus it is necessary to devise a new method to find it.

## 4. Proposed Method

### 4.1 Feasibility Determination

The proposed method is as follows:

- (a) Compute 4 vertices' coordinates of each projection area from the values assigned to  $x_n$  (see 5.1),
- (b) Compute Edge Intersections (EIs), Outer Edge Intersections (OEIs) and Outer Intersections (OIs) from the coordinates computed in step (a) (see 5.2),
- (c) Determine that no NPAs exist if all the following 3 conditions are satisfied, otherwise determine that NPAs exist:
  - (i) EIs exist,
  - (ii) No OEI exists,
  - (iii) No OI exists inside  $\mathcal{T}$ .

For example, regarding 3 arrangements shown in Fig.3, (A) is determined as a feasible solution because all the above 3 conditions are satisfied; (B) is determined as an infeasible solution because the conditions (ii),(iii) are not satisfied; (C) is determined as an infeasible solution because the condition (i) is not satisfied.

### 4.2 Initial Feasible Solution Computation

The proposed method is as follows:

- (a) Generate an initial random solution,
- (b) Minimize Non-Projection Ratio (see 5.6) by LSA,
- (c) Repeat steps (a),(b) until a feasible solution is obtained as the result of step (b).

Note that the condition  $x \in \mathcal{F}$  is removed in the LSA in step (b), unlike the algorithm described in 3.2, be-

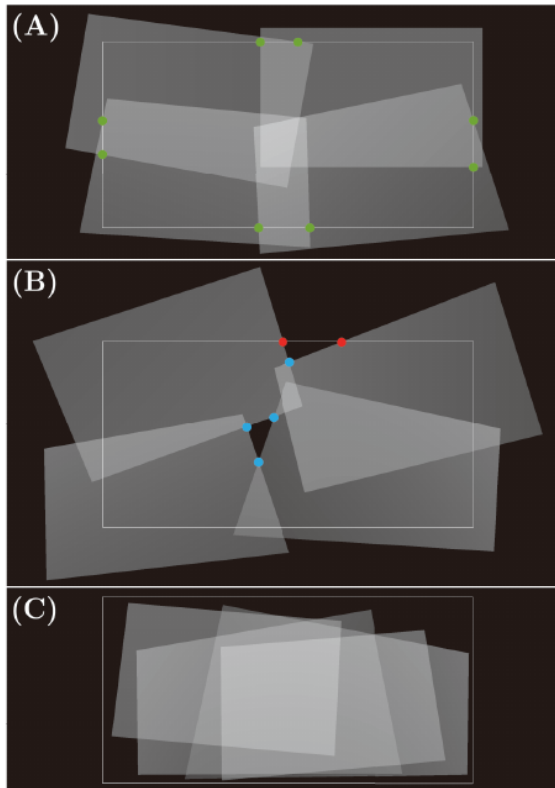


Fig. 3 (A) 実現可能な解の例(緑の点はEIを表す)、(B) 実行不可能な解の例(赤い点はOI、青い点はT内部のOIを表す)、(C) 実行不可能な解の例(EIは存在しない)。

ランダムに生成された解が実現できることは稀であり(6.2参照)、ステップ(b)で見つかった解はほとんどすべて実現不可能である。

## 5. 説明文

本節では、最適化のための数値計算方法と、数値計算に関連する背景について説明する。最初に実験結果を知りたい場合は、このセクションをスキップしてセクション6に進む。

本節のまとめは以下の通りである：

- 壁面上の頂点と多角形の境界の交点の2次元座標の計算方法(5.1、5.2参照)。
- 本調査における範囲内または範囲外の取り決め(5.3および5.4参照)。
- 多角形の境界で囲まれた領域の一般的な数学的表現(5.5参照)。
- 非投影比の計算方法(5.6参照)。
- 目的関数の設計とその計算方法(5.7、5.8、5.9参照)。

### 5.1 各投影領域の頂点

光源座標系を定義し、その原点が各プロジェクターの光の位置に設定されるようにする

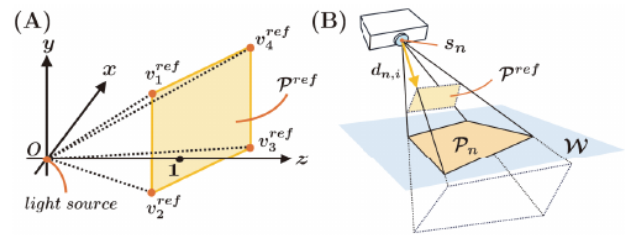


Fig. 4 (A)光源座標系、(B)基準投影面積 $P^{ref}$ と各投影面積 $P_n$ の関係。

線源とその光方向を $(0, 0, 1)$ とする(図4(A)参照)。また、基準投影面積 $P^{ref}$ は平面 $z = 1$ に設定する。光源座標系において、 $P^{ref}$ の各頂点 $v_i^{ref} \in \mathbb{R}^3 (i=1, 2, 3, 4)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} v_1^{ref} &= (-W/2 + L_x, H/2 + L_y, 1), \\ v_2^{ref} &= (-W/2 + L_x, -H/2 + L_y, 1), \\ v_3^{ref} &= (W/2 + L_x, -H/2 + L_y, 1), \\ v_4^{ref} &= (W/2 + L_x, H/2 + L_y, 1), \end{aligned}$$

ここで、 $W, H$ は $P^{ref}$ と $L_x$ の幅/高さを表し、 $L_y$ は幅/高さ方向のレンズシフト量を表す。

ワールド座標系において、光源 $s_n$ から各頂点 $v_i^{ref}$ へ方向 $d_{n,i} \in \mathbb{R}^3$ (図4(B)参照)は、 $d_{n,i} = R(\theta_n^t, \theta_n^p, \theta_n^r) v_i^{ref}$ で表される。本研究では、ゲームエンジンUnityでも採用されている回転行列 $R(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = R_y(\theta_y) R_x(\theta_x) R_z(\theta_z)$ を採用した。

直線 $p = a + kd$ と平面 $(p - b) \cdot n = 0$ の交点に注意、ここで $a, b, d, n \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}$ ,

is generally expressed as

$$p = a + \frac{(b - a) \cdot n}{d \cdot n} d.$$

したがって、各投影領域 $P_n$ の各頂点 $v_{n,i} \in \mathbb{R}^3$ の世界座標は、 $a = s_n, b = 0, d = d_{n,i}, n = (0, 0, 1)$ とすることで計算でき、2次元座標 $v_{n,i} = v_{n,ix}, v_{n,iy}$ を頂点座標として以下の計算を行う。

### 5.2 交差点

#### (1) 交差点の決定

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の2つの線分 $AB, CD$ が与えられたとき、

if  $0 < s < 1$  and  $0 < t < 1$ , then they intersect, where

$$s = \frac{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}, \quad t = -\frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}},$$

and the operator “ $\times$ ” denotes outer product, i.e.,  $a \times b = a_x b_y - a_y b_x (a, b \in \mathbb{R}^2)$ .

Note that  $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{CD}$ , if  $AB, CD$  have an intersection  $P$ .

#### 2) 内部/外部の決定

与えられた点 $x$ と与えられた多角形 $P$ に対して、 $x$ が

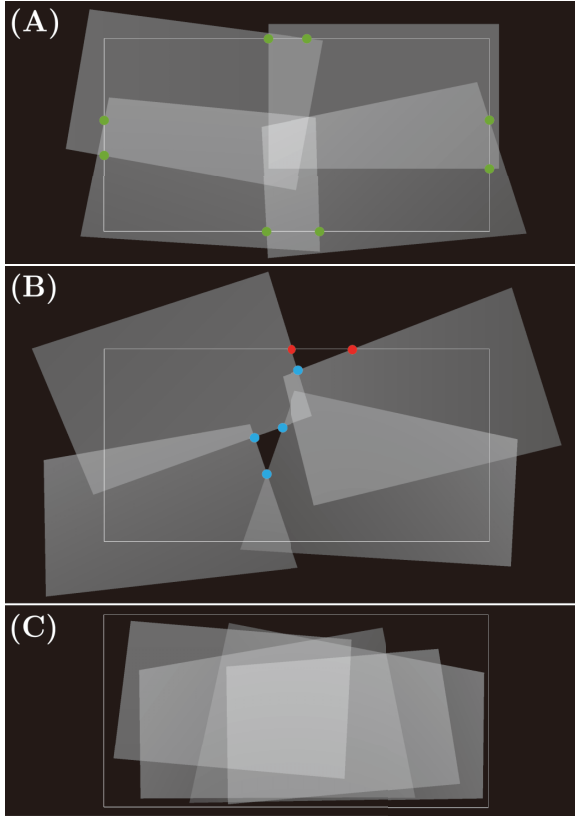


**Fig. 3** (A) Example of a feasible solution (green dots represent EIs), (B) Example of an infeasible solution (red dots represent OEIs, blue dots represent OIs inside  $\mathcal{T}$ ), (C) Example of an infeasible solution (no EI exists).

cause a randomly generated solution is rarely feasible (see 6.2), and almost all solutions found in step (b) are infeasible.

## 5. Description

This section describes numerical computation methods for the optimization and backgrounds related to the numerical computations. If you would like to know the experimental results at first, skip this section and proceed to section 6.

The summary of this section is as follows:

- How to compute 2D coordinates of vertices and intersections of polygonal boundaries on the wall surface (see 5.1 and 5.2),
- Arrangements within or out of the scope in this study (see 5.3 and 5.4),
- General mathematical expression of the area enclosed by polygonal boundaries (see 5.5),
- How to compute Non-Projection Ratio (see 5.6),
- Design of the objective function and how to compute it (see 5.7, 5.8 and 5.9).

### 5.1 Vertices of Each Projection Area

We define the light source coordinate system so that its origin is set on the position of each projector's light

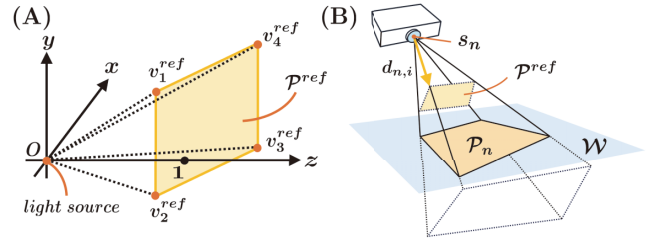


**Fig. 4** (A) Light source coordinate system, (B) Relationship between reference projection area  $\mathcal{P}^{ref}$  and each projection area  $\mathcal{P}_n$ .

source and its light direction is set as  $(0,0,1)$  (see Fig.4 (A)). Besides, the reference projection area  $\mathcal{P}^{ref}$  is set on the plane  $z = 1$ . In the light source coordinate system, each vertex  $v_i^{ref} \in \mathbb{R}^3$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) of  $\mathcal{P}^{ref}$  is expressed as

$$\begin{aligned} v_1^{ref} &= (-W/2 + L_x, H/2 + L_y, 1), \\ v_2^{ref} &= (-W/2 + L_x, -H/2 + L_y, 1), \\ v_3^{ref} &= (W/2 + L_x, -H/2 + L_y, 1), \\ v_4^{ref} &= (W/2 + L_x, H/2 + L_y, 1), \end{aligned}$$

where  $W, H$  denote the width/height of  $\mathcal{P}^{ref}$  and  $L_x, L_y$  denotes the amount of the lens shift in width/height direction.

In the world coordinate system, the direction  $d_{n,i} \in \mathbb{R}^3$  (see Fig.4 (B)) from a light source  $s_n$  to each vertex  $v_i^{ref}$  is expressed as  $d_{n,i} = R(\theta_n^t, \theta_n^p, \theta_n^r) v_i^{ref}$ . In this study, we adopted the rotation matrix  $R(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = R_y(\theta_y) R_x(\theta_x) R_z(\theta_z)$ , which is also adopted in the game engine Unity®.

Note that the intersection of a straight line  $p = a + kd$  and a plane  $(p - b) \cdot n = 0$ , where  $a, b, d, n \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}$ , is generally expressed as

$$p = a + \frac{(b - a) \cdot n}{d \cdot n} d.$$

Therefore, the world coordinate of each vertex  $v'_{n,i} \in \mathbb{R}^3$  of each projection area  $\mathcal{P}_n$  can be computed by setting  $a = s_n, b = 0, d = d_{n,i}, n = (0, 0, 1)$ , and the 2D coordinate  $v_{n,i} = ((v'_{n,i})_x, (v'_{n,i})_y)$  is used as the vertex coordinate in the following computations.

### 5.2 Intersections

#### (1) Intersection Determination

For given 2 line segments  $AB, CD$  on the plane  $\mathbb{R}^2$ , if  $0 < s < 1$  and  $0 < t < 1$ , then they intersect, where

$$s = \frac{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}, \quad t = -\frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}},$$

and the operator “ $\times$ ” denotes outer product, i.e.  $a \times b = a_x b_y - a_y b_x$  ( $a, b \in \mathbb{R}^2$ ).

Note that  $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{CD}$ , if  $AB, CD$  have an intersection  $P$ .

#### (2) Inside/Outside Determination

For a given point  $x$  and a given polygon  $P$ , whether  $x$

は、巻数アルゴリズムと交差数アルゴリズム<sup>11)</sup>の組み合わせのアルゴリズムによって、内側/外側Pを決定することができる。

### (3) 交差点の計算

ターゲット投影領域TをN T個の頂点 $v_i$   $T_T \in \mathbb{R}^2$  ( $i = 1, 2, \dots, N T$ )を持つ多角形とする。交差点は以下のように計算できる:

- $P_{n1}$  の各辺  $l_{n1,i1}$  ( $i_1 = 1, 2, 3, 4$ ) と  $P_{n2}$  ( $i_2 = 1, 2, 3, 4$ ) の各辺  $l_{n2,i2}$  ( $i_2 = 1, 2, 3, 4$ ) が交差するかどうかを判定し、交差する場合は、 $i_{n1,i1,n2,i2} \in \mathbb{R}^2$  の交点の座標を計算する、
- $P_{n3} \forall n3 = n1, n2$  の外側の  $i_{n1,i1,n2,i2}$  を  $0I$  とする。以下、 $i_{on_o} \in \mathbb{R}^2$  ( $n_o = 1, 2, \dots, N_o$ ) は各OIを表す、
- $P_{n1}$  の各辺  $l_{n1,i1}$  ( $i_1 = 1, 2, 3, 4$ ) と T の各辺  $l_i T_T$  が交差するかどうかを決定し、交差する場合は  $i_{en_e} \in \mathbb{R}^2$  ( $n_e = 1, 2, \dots$  ここで、 $l_i T_T = v_i T_{T+1} - v_i T_T$ ,  $v_N T_{T+1} = v_1 T_T$ 、
- $P_{n2} \forall n2 = n1$  の外側の  $i_{ne}^e$  を  $0EI$  とする。以下、 $i_{noe}^{oe} \in \mathbb{R}^2$  ( $n_{oe} = 1, 2, \dots, N_{oe}$ ) は各OEIを表す。

### 5.3 例外的な取り決め

目標投影面積Tと各投影面積 $P_n$ は、それぞれ多角形の境界で囲まれた図として理解することができ、それは合成された複数の $P_n$ の面積が互いに重なり合う同じである。本研究では、上記の多角形の境界のうち2つが交点のみで重なると仮定する。つまり、 $N + 1$ 個の多角形境界に関する以下の3つのケース( $\partial T$  と  $\partial P_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ))は、本研究の範囲外である(各例を図5に示す):

- 一方の境界の頂点が他方の境界の辺上にある、
- 一方の境界の頂点と他方の境界の頂点が重なっていること。
- 1点で3つ以上の境界が交差している。

詳細には、 $s = 0, s = 1, t = 0, t = 1$  の場合

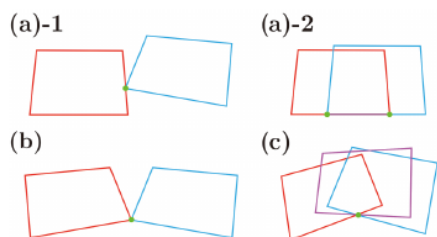


Fig. 5 例外的な取り決めの例

5.2(3)で説明したステップ(a), (c)の交点は(a), (b)の場合に対応し、5.2(3)で説明したステップ(a), (c)で計算したすべての交点の間に同じ2つの交点が存在する場合は(c)の場合に対応する。また、(a)~(c)のいずれかのケースに対応する配置であれば、光源  $s_n$  の位置が若干変化する(例えば、y方向に+0.1 mm)ので、このような例外的な配置は、本研究の範囲内で典型的な配置に変更することができる。

### 5.4 $P_n$ とTの関係

T

$P_n$ とTの関係は以下の3種類に分類される(各例を図6に示す):

- EIが存在する、
- 頂点 $v_{n,1}$ はTの内側にある、
- 頂点  $v_{n,1}$  は T の外側にある。

本研究では、(c)のような投影領域を持つ配置はあらかじめ除外されていると仮定する。これは、(c)-1型の投影領域は、画像全体の投影時に投影されない領域であるため(図2の下参照)、このような領域を考慮することは絶対的に無意味であり、(c)-2型の投影領域はTを完全に単独でカバーするため、複数の投影器を使用する意味がないためである。

このような配置を除外するために、4.2で説明したステップ(a)では、投影面積が(c)-1の配置を初期ランダム解として採用せず、各投影機と壁面との距離Wが大きすぎないように適切に設定する必要がある。

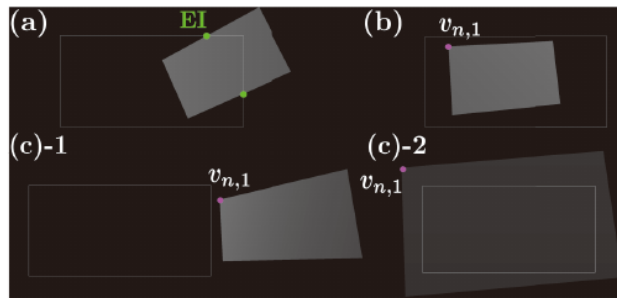


Fig. 6  $P_n$ とTの関係.

### 5.5 面積の計算

K 個の多角形の境界が互いに切断され、各境界が  $N_k$  個の頂点  $p_{k,i} \in \mathbb{R}^2$  ( $i = 1, 2, \dots, N_k$ ) を持つとき、すべての境界で囲まれた領域は

aries is expressed as

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{N_k} p_{k,i} \times p_{k,i+1}, \quad p_{k,N_k+1} = p_{k,1},$$

where the operator “ $\times$ ” denotes outer product, i.e.,

$$a \times b = a_x b_y - a_y b_x \quad (a, b \in \mathbb{R}^2).$$

is inside/outside  $P$  can be determined by the algorithm of the combination of Winding Number Algorithm and Crossing Number Algorithm<sup>11)</sup>.

### (3) Intersections Computation

Let the target projection area  $\mathcal{T}$  be a polygon with  $N^{\mathcal{T}}$  vertices  $v_{i^{\mathcal{T}}}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^2$  ( $i^{\mathcal{T}} = 1, 2, \dots, N^{\mathcal{T}}$ ). Intersections can be computed as follows:

- Determine whether each side  $l_{n_1, i_1}$  ( $i_1 = 1, 2, 3, 4$ ) of  $\mathcal{P}_{n_1}$  and each side  $l_{n_2, i_2}$  ( $i_2 = 1, 2, 3, 4$ ) of  $\mathcal{P}_{n_2}$  ( $n_2 \neq n_1$ ) intersect or not, and if they intersect, compute the coordinate of the intersection  $i_{n_1, i_1, n_2, i_2} \in \mathbb{R}^2$ , where  $l_{n, i} = v_{n, i+1} - v_{n, i}$  and  $v_{n, 5} = v_{n, 1}$ ,
- Identify  $i_{n_1, i_1, n_2, i_2}$  outside  $\mathcal{P}_{n_3}$  ( $\forall n_3 \neq n_1, n_2$ ) as OIs. Hereinafter,  $i_{n_o}^o \in \mathbb{R}^2$  ( $n_o = 1, 2, \dots, N_o$ ) denotes each OI,
- Determine whether each side  $l_{n_1, i_1}$  ( $i_1 = 1, 2, 3, 4$ ) of  $\mathcal{P}_{n_1}$  and each side  $l_{i^{\mathcal{T}}}^{\mathcal{T}}$  of  $\mathcal{T}$  intersect or not, and if they intersect, compute the coordinate of the intersection  $i_{n_e}^e \in \mathbb{R}^2$  ( $n_e = 1, 2, \dots, N_e$ ), and identify  $i_{n_e}^e$  as EIs, where  $l_{i^{\mathcal{T}}}^{\mathcal{T}} = v_{i^{\mathcal{T}}+1}^{\mathcal{T}} - v_{i^{\mathcal{T}}}^{\mathcal{T}}$  and  $v_{N^{\mathcal{T}}+1}^{\mathcal{T}} = v_1^{\mathcal{T}}$ ,
- Identify  $i_{n_e}^e$  outside  $\mathcal{P}_{n_2}$  ( $\forall n_2 \neq n_1$ ) as OEIs. Hereinafter,  $i_{n_{oe}}^{oe} \in \mathbb{R}^2$  ( $n_{oe} = 1, 2, \dots, N_{oe}$ ) denotes each OEI.

### 5.3 Exceptional Arrangements

The target projection area  $\mathcal{T}$  and each projection area  $\mathcal{P}_n$  can be understood as a diagram enclosed by a polygonal boundary respectively, and that is the same with the area of combined multiple  $\mathcal{P}_n$  overlapping with each other. In this study, we assume that 2 of the above polygonal boundaries overlap only at their intersection. In other word, the following 3 cases about  $N+1$  polygonal boundaries ( $\partial\mathcal{T}$  and  $\partial\mathcal{P}_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ )) are out of the scope in this study (each example is shown in Fig.5):

- A vertex of one boundary is on a side of the other boundary,
- A vertex of one boundary and a vertex of the other boundary overlap,
- More than 3 boundaries intersect at a single point.

In detail, the cases where  $s = 0, s = 1, t = 0, t = 1$

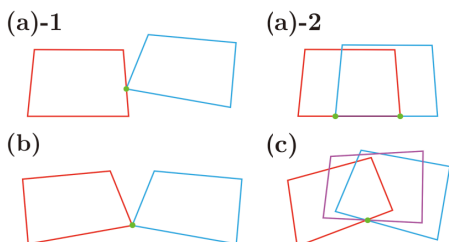


Fig. 5 Examples of exceptional arrangements.

in steps (a),(c) described in 5.2 (3) correspond to the cases (a),(b), and the case where the same 2 intersections exist among all intersections computed in steps (a),(c) described in 5.2 (3) correspond to the case (c). Besides, if an arrangement correspond to any of the cases (a)-(c), the position of the light source  $s_n$  is slightly changed (e.g., +0.1mm in  $y$ -direction), thus such an exceptional arrangement can be modified to a typical arrangement within the scope in this study.

### 5.4 Relationships between $\mathcal{P}_n$ and $\mathcal{T}$

The relationships between  $\mathcal{P}_n$  and  $\mathcal{T}$  are classified into the following 3 types (each example is shown in Fig.6):

- EIs exist,
- The vertex  $v_{n,1}$  is inside  $\mathcal{T}$ ,
- The vertex  $v_{n,1}$  is outside  $\mathcal{T}$ .

In this study, we assume that arrangements with projection areas of type (c) are excluded in advance. This is because a projection area of type (c)-1 is the area where no image is projected at the time of the whole image projection (see the bottom of Fig.2), thus considering such an area is absolutely meaningless, and because a projection area of type (c)-2 covers  $\mathcal{T}$  entirely by itself, thus there is no meaning of using multiple projectors.

In order to exclude such arrangements, an arrangement with projection areas of type (c)-1 is not adopted as an initial random solution in step (a) described in 4.2, and the distance between each projector and the wall surface  $\mathcal{W}$  need to be preset appropriately so that its value is not too large.

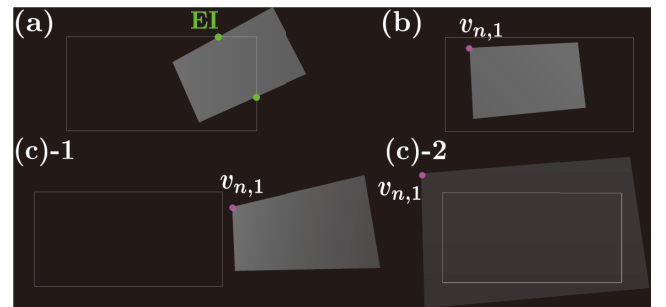


Fig. 6 Relationships between  $\mathcal{P}_n$  and  $\mathcal{T}$ .

### 5.5 Area Calculation

For given  $K$  polygonal boundaries disconnected with each other, each of which has  $N_k$  vertices  $p_{k,i} \in \mathbb{R}^2$  ( $i = 1, 2, \dots, N_k$ ), the area enclosed by all the boundaries is expressed as

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{N_k} p_{k,i} \times p_{k,i+1}, \quad p_{k,N_k+1} = p_{k,1},$$

where the operator “ $\times$ ” denotes outer product, i.e.,  $a \times b = a_x b_y - a_y b_x$  ( $a, b \in \mathbb{R}^2$ ).

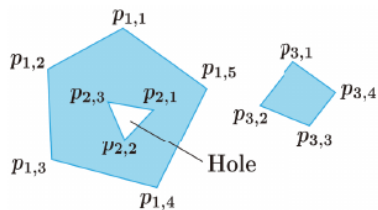


Fig. 7 頂点を並べる例。

なお、 $\sum_{i=1}^{N_k} p_{k,i} \times p_{k,i+1}$  のプラス/マイナス符号は、頂点の順序が時計回りか反時計回りかによって逆であるため、穴領域の頂点を並べることで穴領域が自然に排除され、他は逆になる (頂点の並び方の例を図7に示す)。

したがって、上式によって面積を計算するためには、各多角形境界の頂点の円形順序を同定する必要がある。

## 5.6 非投影比

### (1) 方程式

$\Sigma (= \cup P_n)$  の境界を  $\partial O^{inside} T$  とし、それぞれが  $\partial$  を構成する多角形境界の一つであり、 $T$  の内側にある多角形境界の集合を  $\partial O^{inside} T$  とする。

非投影比 (NPR) は次式で表される。

(a) EI が存在し、OEI が存在しない場合、

$$-\frac{A(O^{inside} T)}{A(T)},$$

(b) Otherwise,

$$1 - \frac{A(O^{inside} T) + A(\Sigma \cap T)}{A(T)},$$

ここで、 $A(-)$  は面積を表す (これら2つのケースの例を図8に示す)。

### (2) 円形パーミュテーション

の円形順序と  $\partial(\Sigma \cap T)$  を生成する方法について、以下に説明する。

まず、 $\partial$  の円形順序は次のように生成できる (図10も参照)：

(a)  $v_{n,1}$  から出発し、 $\partial P_n$  の頂点  $v_{n,i}$  上の  $OI$   $i$ 、OEI  $i_{noe}^{oe}$  を含む循環順序を生成する、

$$v_{1,1} \rightarrow i_1^{oe} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow i_1^o \rightarrow v_{1,3} \rightarrow i_2^o \rightarrow i_3^o \rightarrow v_{1,4} \rightarrow i_4^o \rightarrow$$

(b)  $v_{n,1}$  が  $P_n \forall n = n$  の外側にある場合、ステップ(a)で生成した円形順序の2番目の  $i_{no}^o$  を抽出の開始点として特定し、そうでない場合は最初の  $i_{no}^o$  を抽出し、両端が  $i_{no}^o$  である順序を抽出する、

$$i_2^o \rightarrow i_3^o, \quad i_4^o \rightarrow v_{1,1} \rightarrow i_1^{oe} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow i_1^o$$

(c) Perform steps (a),(b) for all  $\partial P_n$  with OIs  $i_{no}^o$ ,

$$i_3^o \rightarrow i_2^{oe} \rightarrow i_5^o, \quad i_6^o \rightarrow v_{2,4} \rightarrow v_{2,1} \rightarrow i_4^o,$$

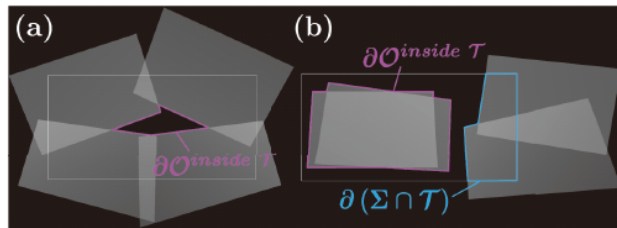


図8 NPRを計算するための2つのケース

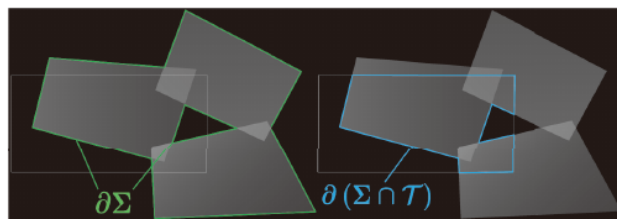


Fig. 9 Example of  $\partial \Sigma$  and  $\partial(\Sigma \cap T)$ .

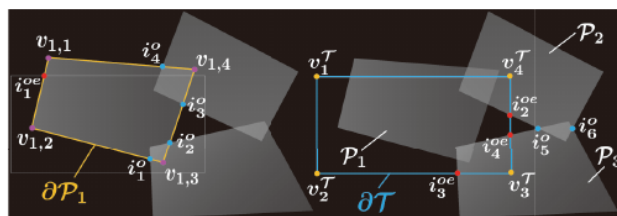


Fig. 10  $P_n$ ,  $\partial T$ ,  $OI$ ,  $OEI$ ,  $noe$  の頂点。

$$i_1^o \rightarrow i_3^{oe} \rightarrow v_{3,2} \rightarrow v_{3,3} \rightarrow i_6^o, \quad i_5^o \rightarrow i_4^{oe} \rightarrow i_2^o$$

(d) ステップ(b),(c)で生成された順序を結んで、円形の順序を生成する。

$$i_2^o \rightarrow i_3^o \rightarrow i_2^{oe} \rightarrow i_5^o \rightarrow i_4^{oe} \rightarrow,$$

$$i_4^o \rightarrow v_{1,1} \rightarrow i_1^{oe} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow i_1^o \rightarrow i_3^{oe} \rightarrow v_{3,2}$$

6 ステップ(d)で生成された円形順序がOEI  $i_{noe}^{oe}$  を持たず、円形順序の最初の点がTの内側にある場合、円形順序は  $\partial O^{inside} T$  の要素であることに注意。また、穴に対応する円形の順序は時計回りに、他は反時計回りに並べられる。

次に、ステップ(d)で生成された円形順序とOEI  $i_{noe}^{oe}$  を含む順序から、 $\partial(\Sigma \cap T)$  の円形順序は以下のように生成できる：

(e) 円順序の最初の点がTの外側にある場合、ステップ(d)で生成された円順序の最初の  $i_{noe}^{oe}$  を抽出の開始点として特定し、内側にある場合は2番目の  $i_{noe}^{oe}$  をそのまま特定し、両端が  $i_{noe}^{oe}$  である順序を抽出する、

$$i_4^{oe} \rightarrow i_2^o \rightarrow i_3^o \rightarrow i_2^{oe},$$

$$i_1^{oe} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow i_1^o \rightarrow i_3^{oe}$$

(f)  $v_{1,T}$  から出発し、 $\partial T$  の頂点  $v_{i,T}$  とOEI  $i_{noe}^{oe}$  を含む循環順序を生成する、

$$v_{1,T} \rightarrow v_{2,T} \rightarrow i_3^{oe} \rightarrow v_{3,T} \rightarrow i_4^{oe} \rightarrow i_2^{oe}$$

$$\rightarrow v_{4,T} \rightarrow i_1^{oe} \rightarrow$$

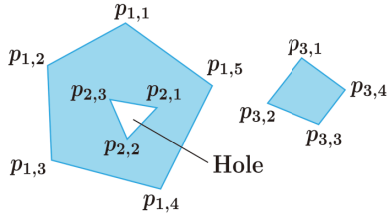


Fig. 7 Example of ordering vertices.

Note that the plus/minus sign of  $\sum_{i=1}^{N_k} p_{k,i} \times p_{k,i+1}$  is opposite according to whether the order of vertices is clockwise or counterclockwise, thus the hole areas are excluded naturally by ordering the vertices of hole areas and the others oppositely (an example of ordering vertices is shown in Fig.7).

Therefore, to calculate the area by the above equation, the circular permutation of each polygonal boundary's vertices needs to be identified.

### 5.6 Non-Projection Ratio

#### (1) Equation

Let  $\partial\Sigma$  be the boundary of  $\Sigma (= \bigcup_n \mathcal{P}_n)$ , and  $\partial\mathcal{O}^{inside} \mathcal{T}$  be the set of polygonal boundaries, each of which is one of the polygonal boundaries comprising  $\partial\Sigma$  and is inside  $\mathcal{T}$ .

Non-Projection Ratio (NPR) is expressed as

- (a) If EIs exist and no OEI exists,
- $$-\frac{A(\mathcal{O}^{inside} \mathcal{T})}{A(\mathcal{T})},$$
- (b) Otherwise,
- $$1 - \frac{A(\mathcal{O}^{inside} \mathcal{T}) + A(\Sigma \cap \mathcal{T})}{A(\mathcal{T})},$$

where  $A(\cdot)$  denotes the area (examples of these 2 cases are shown in Fig.8).

#### (2) Circular Permutations

The method to generate the circular permutations of  $\partial\Sigma$  and  $\partial(\Sigma \cap \mathcal{T})$  shown in Fig.9 is discussed below.

Firstly, the circular permutations of  $\partial\Sigma$  can be generated as follows (see also Fig.10):

- (a) Generate a circular permutation starting from  $v_{n,1}$  and including vertices  $v_{n,i}$  of  $\partial\mathcal{P}_n$ , OIs  $i_{n_o}^o$  and OEIs  $i_{n_{oe}}^{oe}$ ,
- $$v_{1,1} \rightarrow i_1^{oe} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow i_1^o \rightarrow v_{1,3} \rightarrow i_2^o \rightarrow i_3^o \rightarrow v_{1,4} \rightarrow i_4^o \rightarrow$$
- (b) If  $v_{n,1}$  is outside  $\mathcal{P}_{n'}$  ( $n' \neq n$ ), identify the second  $i_{n_o}^o$  in the circular permutation generated in step (a) as a starting point of extraction, if not, identify the first  $i_{n_o}^o$  as it, and extract permutations whose both ends are  $i_{n_o}^o$ ,
- $$i_2^o \rightarrow i_3^o, \quad i_4^o \rightarrow v_{1,1} \rightarrow i_1^{oe} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow i_1^o$$
- (c) Perform steps (a),(b) for all  $\partial\mathcal{P}_n$  with OIs  $i_{n_o}^o$ ,
- $$i_3^o \rightarrow i_2^{oe} \rightarrow i_5^o, \quad i_6^o \rightarrow v_{2,4} \rightarrow v_{2,1} \rightarrow i_4^o,$$

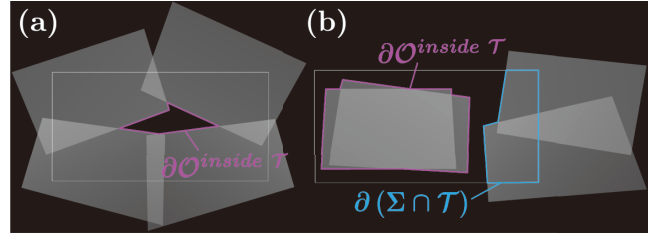


Fig. 8 2 cases for computing NPR.

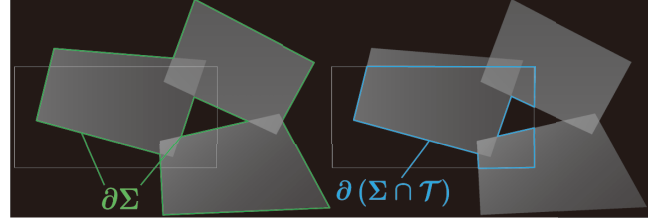


Fig. 9 Example of  $\partial\Sigma$  and  $\partial(\Sigma \cap \mathcal{T})$ .

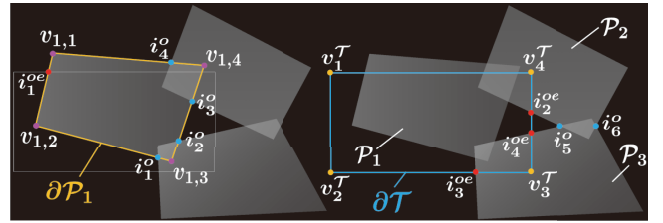


Fig. 10 Vertices of  $\partial\mathcal{P}_n$ ,  $\partial\mathcal{T}$ , OIs  $i_{n_o}^o$  and OEIs  $i_{n_{oe}}^{oe}$ .

- $i_1^o \rightarrow i_3^{oe} \rightarrow v_{3,2} \rightarrow v_{3,3} \rightarrow i_6^o, \quad i_5^o \rightarrow i_4^{oe} \rightarrow i_2^o$
- (d) Generate circular permutations by connecting the permutations generated in steps (b),(c).
- $$i_2^o \rightarrow i_3^o \rightarrow i_2^{oe} \rightarrow i_5^o \rightarrow i_4^{oe} \rightarrow,$$
- $$i_4^o \rightarrow v_{1,1} \rightarrow i_1^{oe} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow i_1^o \rightarrow i_3^{oe} \rightarrow v_{3,2} \rightarrow v_{3,3} \rightarrow i_6^o \rightarrow v_{2,4} \rightarrow v_{2,1} \rightarrow$$

Note that if a circular permutation generated in step (d) has no OEI  $i_{n_{oe}}^{oe}$  and the first point in the circular permutation is inside  $\mathcal{T}$ , the circular permutation is an element of  $\partial\mathcal{O}^{inside} \mathcal{T}$ . Besides, circular permutations corresponding to holes are ordered clockwise, while the others are ordered counterclockwise.

Next, from the circular permutations generated in step (d) and including OEIs  $i_{n_{oe}}^{oe}$ , the circular permutations of  $\partial(\Sigma \cap \mathcal{T})$  can be generated as follows:

- (e) If the first point of a circular permutation is outside  $\mathcal{T}$ , identify the first  $i_{n_{oe}}^{oe}$  in the circular permutation generated in step (d) as a starting point of extraction, if inside, identify the second  $i_{n_{oe}}^{oe}$  as it, and extract permutations whose both ends are  $i_{n_{oe}}^{oe}$ ,
- $$i_4^{oe} \rightarrow i_2^o \rightarrow i_3^o \rightarrow i_2^{oe},$$
- $$i_1^{oe} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow i_1^o \rightarrow i_3^{oe}$$
- (f) Generate a circular permutation starting from  $v_1^T$  and including vertices  $v_{i\mathcal{T}}^T$  of  $\partial\mathcal{T}$  and OEIs  $i_{n_{oe}}^{oe}$ ,
- $$v_1^T \rightarrow v_2^T \rightarrow i_3^{oe} \rightarrow v_3^T \rightarrow i_4^{oe} \rightarrow i_2^{oe} \rightarrow v_4^T \rightarrow i_1^{oe} \rightarrow$$

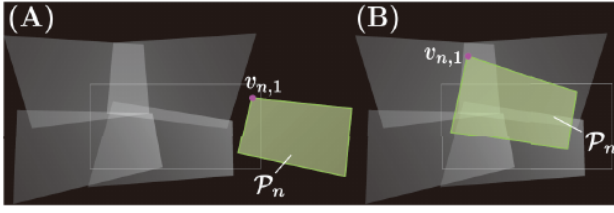


Fig. 11 Examples of  $\partial P_n$  with no OIs  $i_{no}^o$ .

- (g)  $v_1$  Tが全ての $P_n$ の外側にある場合、ステップ(f)で生成された円形順列の最初の $i_{noe}^o$ を抽出の出発点として特定し、そうでない場合は2番目の $i_{noe}^o$ をそのまま特定し、両端が $i_{noe}^o$ である順列を抽出する、

$$i_3^{oe} \rightarrow v_3^T \rightarrow i_4^{oe}, \quad i_2^{oe} \rightarrow v_4^T \rightarrow i_1^{oe}$$

- (h) ステップ(e), (g)で生成された順列を接続して、円形の順列を生成する、

$$i_4^{oe} \rightarrow i_2^o \rightarrow i_3^o \rightarrow i_2^{oe} \rightarrow v_4^T \rightarrow i_1^{oe} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow i_1^o \rightarrow i_3^o \rightarrow v_3^T \rightarrow$$

なお、 $i_{no}^o$ が $i$ がない $\partial P_n$ の場合、 $v_{n,1}$ が $P_n \forall n = n$ の外側にある場合、ステップ(a), (e)-(h)は実行されるが、ステップ(b)-(d)は実行されず、そうでない場合はステップ(a)(h)は実行されない(これら2つのケースの例を図11に示す)。

## 5.7 目的関数

In this study, the following function  $f(x)$  is adopted as the objective function described in 3.2:

$$f(x) = w_1 E_1 + w_2 E_2 + w_3 E_3,$$

$$E_2 = 1 - \mu, \quad E_3 = \sigma,$$

ここで、 $E_1$ はスティッキングアウト比(5.8参照)、 $\mu$ ,  $\sigma$ はそれぞれT内部の輝度の平均と標準偏差(5.9参照)、 $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ は $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ に対応する重みを表す。

$E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ を導入する各目的は以下の通りである:

$E_1$ : 画像投影時に画像が投影されない場合、スティッキングアウト面積を小さくする(図2下参照)、

$E_2$ : T内部の輝度を上げるために、

$E_3$ : T内部の輝度を均一にする。

## 5.8 スティックアウト比率

### (1) 方程式

Sticking-Out Ratio is expressed as

ここで、 $A(-)$ は面積、 $A'(-)$ は正規化面積を表し、 $A^{pref} = H \times W$  ( $H$ ,  $W$ については5.1を参照)。

$P_n \cap T$ の面積は、 $P_n \cap T$ を $P^{ref}$ に射影することで正規化される。これは、 $P_n$ 内部の画素密度が基準投影状態以外では一様でないため( $\theta_n^p = \theta_n^t = \theta_n^r = 0$ )、

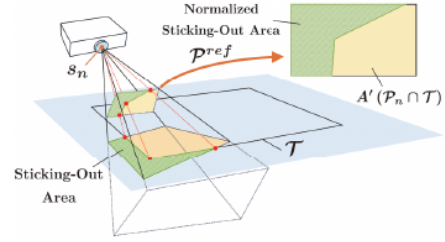
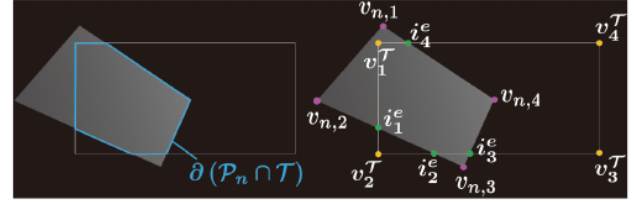


Fig. 12 スティックアウト面積の正規化



$P_n$ 自体の面積を評価指標として採用すると、画素密度の異なる領域は同じ値として評価されるが、そのような評価は適切ではないためである。

詳細には、 $P^{ref}$ と $s_n$ と $P_n \cap T$ の各頂点を結ぶ直線との交点を投影領域の各頂点として計算し、 $P^{ref}$ 上の投影領域の面積を正規化面積 $A(P_n \cap T)$ として計算する(図12参照)。

## 2) 円周順列

図13に示す $\partial(P_n \cap T)$ の円形順列の生成方法について、以下に説明する。なお、 $E_1$   $i_{noe}^o$ を含まない $P_n$ のスティッキングアウト面積は、以下のステップを踏まずに0と決定することができる。

- (a)  $v_{n,1}$ から出発し、 $\partial P_n$ の頂点 $v_{n,i}$ と $E_1$   $i_{noe}^o$ を含む循環順列を生成する、

$$v_{n,1} \rightarrow v_{n,2} \rightarrow i_1^e \rightarrow i_2^e \rightarrow v_{n,3} \rightarrow i_3^e \rightarrow v_{n,4} \rightarrow i_4^e \rightarrow$$

- (b)  $v_{n,i}$ がTの外側にある場合、ステップ(a)で生成された円形順列の最初の $i_{noe}^o$ を抽出の開始点とし、内側にある場合は2番目の $i_{noe}^o$ を抽出し、両端が $i_{noe}^o$ である順列を抽出する、

$$i_1^e \rightarrow i_2^e, \quad i_3^e \rightarrow v_{n,4} \rightarrow i_4^e$$

- (c)  $v_1$  Tから出発し、 $\partial T$ の頂点 $v_i$  Tと $E_1$   $i_{noe}^o$ を含む循環順列を生成する、

$$v_1^T \rightarrow i_1^e \rightarrow v_2^T \rightarrow i_2^e \rightarrow i_3^e \rightarrow v_3^T \rightarrow v_4^T \rightarrow i_4^e \rightarrow$$

- (d)  $v_1$  Tが $P_n$ の外側にある場合、ステップ(c)で生成された円形順列の最初の $i_{noe}^o$ を抽出の開始点として特定し、そうでない場合は2番目の $i_{noe}^o$ を抽出し、両端が $i_{noe}^o$ である順列を抽出する、

$$i_2^e \rightarrow i_3^e, \quad i_4^e \rightarrow v_1^T \rightarrow i_1^e$$

- (e) を結んで円形の順列を生成する。

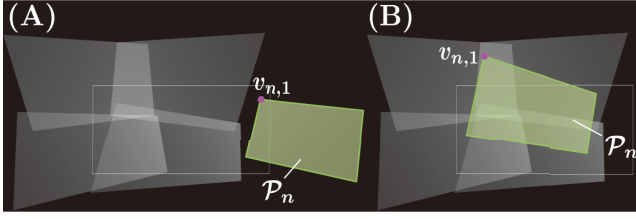


**Fig. 11** Examples of  $\partial\mathcal{P}_n$  with no OIs  $i_{n_o}^o$ .

- (g) If  $v_1^T$  is outside all  $\mathcal{P}_n$ , identify the first  $i_{n_{oe}}^{oe}$  in the circular permutation generated in step (f) as a starting point of extraction, if not, identify the second  $i_{n_{oe}}^{oe}$  as it, and extract permutations whose both ends are  $i_{n_{oe}}^{oe}$ ,

$$i_3^{oe} \rightarrow v_3^T \rightarrow i_4^{oe}, \quad i_2^{oe} \rightarrow v_4^T \rightarrow i_1^{oe}$$

- (h) Generate circular permutations by connecting the permutations generated in steps (e),(g),

$$i_4^{oe} \rightarrow i_2^o \rightarrow i_3^o \rightarrow i_2^{oe} \rightarrow v_4^T \rightarrow i_1^{oe} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow i_1^o \rightarrow i_3^{oe} \rightarrow v_3^T \rightarrow$$

Note that for  $\partial\mathcal{P}_n$  with no OI  $i_{n_o}^o$ , if  $v_{n,1}$  is outside  $\mathcal{P}_{n'}$  ( $\forall n' \neq n$ ), steps (a),(e)-(h) are performed but steps (b)-(d) are not performed, otherwise none of steps (a)-(h) are performed (examples of these 2 cases are shown in Fig.11).

### 5.7 Objective Function

In this study, the following function  $f(x)$  is adopted as the objective function described in 3.2:

$$f(x) = w_1 E_1 + w_2 E_2 + w_3 E_3,$$

$$E_2 = 1 - \mu, \quad E_3 = \sigma,$$

where  $E_1$  denotes sticking-out ratio (see 5.8),  $\mu, \sigma$  denote the average and the standard deviation of the luminance inside  $\mathcal{T}$  respectively (see 5.9), and  $w_1, w_2, w_3$  denote weights corresponding to  $E_1, E_2, E_3$ .

Each objective of introducing  $E_1, E_2, E_3$  is as follows:  
 $E_1$ : To reduce sticking-out area, where no image is projected at the time of the whole image projection (see the bottom of Fig.2),

$E_2$ : To increase the luminance inside  $\mathcal{T}$ ,

$E_3$ : To make the luminance inside  $\mathcal{T}$  uniform.

### 5.8 Sticking-Out Ratio

#### (1) Equation

Sticking-Out Ratio is expressed as

$$1 - \frac{1}{N} \sum_n \frac{A'(\mathcal{P}_n \cap \mathcal{T})}{A(\mathcal{P}^{ref})},$$

where  $A(\cdot)$  denotes the area,  $A'(\cdot)$  denotes the normalized area, and  $A(\mathcal{P}^{ref}) = H \times W$  (see 5.1 about  $H, W$ ).

Note that the area of  $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{T}$  is normalized by projecting  $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{T}$  onto  $\mathcal{P}^{ref}$ , where pixel density is uniform. This is because the pixel density inside  $\mathcal{P}_n$  is not uniform except the reference projection state ( $\theta_n^p = \theta_n^t = \theta_n^r = 0$ ), hence if the area of  $\mathcal{P}_n$  itself is

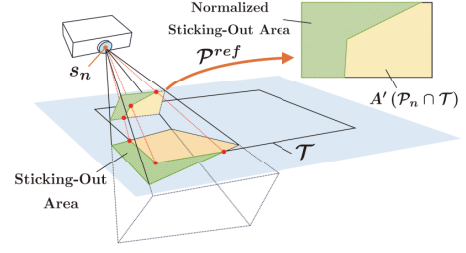


**Fig. 12** Normalizing sticking-out area.

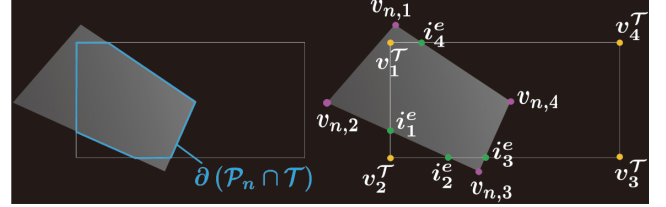


**Fig. 13** Vertices of  $\partial\mathcal{P}_n, \partial\mathcal{T}$  and EIs  $i_{n_e}^e$ .

adopted as the evaluation indicator, the areas with different pixel densities are evaluated as the same values, but such an evaluation is not appropriate.

In detail, an intersection of  $\mathcal{P}^{ref}$  and a straight line connecting  $s_n$  and each vertex of  $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{T}$  is computed as each vertex of the projected region, and the area of the projected region on  $\mathcal{P}^{ref}$  is computed as the normalized area  $A'(\mathcal{P}_n \cap \mathcal{T})$  (see Fig.12).

#### (2) Circular Permutations

The method to generate the circular permutations of  $\partial(\mathcal{P}_n \cap \mathcal{T})$  shown in Fig.13 is discussed below. Note that the sticking-out area of  $\mathcal{P}_n$  with no EI  $i_{n_e}^e$  can be determined as 0 without performing the following steps.

- Generate a circular permutation starting from  $v_{n,1}$  and including vertices  $v_{n,i}$  of  $\partial\mathcal{P}_n$  and EIs  $i_{n_e}^e$ ,  

$$v_{n,1} \rightarrow v_{n,2} \rightarrow i_1^e \rightarrow i_2^e \rightarrow v_{n,3} \rightarrow i_3^e \rightarrow v_{n,4} \rightarrow i_4^e \rightarrow$$
- If  $v_{n,i}$  is outside  $\mathcal{T}$ , identify the first  $i_{n_e}^e$  in the circular permutation generated in step (a) as a starting point of extraction, if inside, identify the second  $i_{n_e}^e$  as it, and extract permutations whose both ends are  $i_{n_e}^e$ ,  

$$i_1^e \rightarrow i_2^e, \quad i_3^e \rightarrow v_{n,4} \rightarrow i_4^e$$
- Generate a circular permutation starting from  $v_1^T$  and including vertices  $v_{i_\tau}^T$  of  $\partial\mathcal{T}$  and EIs  $i_{n_e}^e$ ,  

$$v_1^T \rightarrow i_1^e \rightarrow v_2^T \rightarrow i_2^e \rightarrow i_3^e \rightarrow v_3^T \rightarrow v_4^T \rightarrow i_4^e \rightarrow$$
- If  $v_1^T$  is outside  $\mathcal{P}_n$ , identify the first  $i_{n_e}^e$  in the circular permutation generated in step (c) as a starting point of extraction, if not, identify the second  $i_{n_e}^e$  as it, and extract permutations whose both ends are  $i_{n_e}^e$ ,  

$$i_2^e \rightarrow i_3^e, \quad i_4^e \rightarrow v_1^T \rightarrow i_1^e$$
- Generate circular permutations by connecting the

ステップ(b)と(d)で生成された順列、

$$i_1^e \rightarrow i_2^e \rightarrow i_3^e \rightarrow v_{n,4} \rightarrow i_4^e \rightarrow v_1^T \rightarrow$$

## 5.9 輝度評価

T内部の輝度を評価する方法は次のとおりである。

後述する。

各プロジェクターは、光方向に垂直な面上に一律な照度分布を持つ理想的なプロジェクターであり、壁面Wはランバート面であると仮定する(図14参照)。

照度の逆二乗則から、輝度指標L(p)は次式で表される。

$$L(p) = \frac{L(p)}{L_{ref}} = \frac{u_{ref}}{\{d(s_n, p)\}^2},$$

ここで、L(p)は点 $p \in \mathbb{R}^3$ における輝度を表し、 $L_{ref}$ は予め設定された基準距離 $d_{ref}$ における輝度を表し、 $d(s_n, p)$ は光源 $s_n$ と $p$ を含む平面との距離を表し、光方向に垂直である(図14参照)。

また、「強度ブレンド」<sup>10)</sup>を行った後の輝度指標 $L_{blend}(p)$ は次式で表される。

$$L_{blend}(p) = \frac{L_{blend}(p)}{L_{ref}} = \frac{d_{ref}^2}{l} \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{l_n}{\{d(s_n, p)\}^2},$$

$$l = \sum_{n \in \mathcal{N}} l_n, \quad l_n = \min\{u, v, 1 - u, 1 - v\},$$

ここで、 $L_{blend}(p)$ は「強度ブレンド」を行った後の点 $p$ の輝度を表し、 $(u, v)$ は $p_{ref}$ と $s_n$ と $p$ を結ぶ直線との交点の座標を長さ1の両側を持つ正方形に投影したものである(図15参照)。

最後に、 $L_{blend}(p)$ の平均 $\mu$ と標準偏差 $\sigma$ が計算され、 $p_{n \times n}$ はT内部で予め設定された $N_x \times N_y$ 格子点の各点を表す。

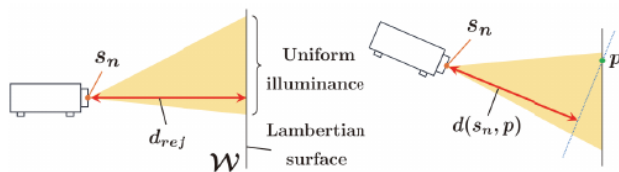


Fig. 14 輝度評価の前提条件。

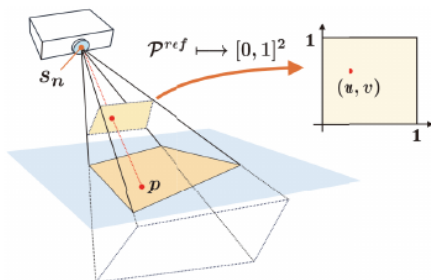


図15 交差点の正方形への投影図。

## 6. 実験結果

### 6.1 前提条件

各プロジェクターは、固定角度を調整可能なヘッドを介して同じサイズの三脚に固定され、三脚は壁に平行に一直線に配置されていると仮定して実験を行った。しかし、天と地球が逆転した場合、この状況は、プロジェクターが天井の下に装備されたレールに固定されているセクション1で述べたものと同じである。

#### (1) 値

以下の値を採用した：

3.1で述べた値について、 $r_{p2t} = (0, 0.1, 0.1)$ ,  $r_{t2r} = (0.1, 0.1, 0)$ ,  $r_{r2s} = (0, 0.1, 0.1)$ ,  $(p_n)_y = 0.5$ ,  $(p_n)_z = 3$ 、ここで $(p_n)_y$ ,  $(p_n)_z$ はそれぞれ $p_n$ のy成分、z成分を表す；

5.1で述べた値について、 $H=0.536$ ,  $W=1.6 \times H$ ,  $L_x=0$ ,  $L_y=0.4 \times H$ ；

5.7と5.9で述べた値について、 $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$ ,  $d_{ref} = 2.8$ 。なお、値2.8は、基準投影状態( $\theta_n^p = \theta_n^t = \theta_n^r = 0$ )における光源 $s_n$ と平面壁面Wとの距離である；

5.9で述べた値について、最終的な投影品質評価では $N_x = 201$ ,  $N_y = 101$ 、すなわち表3と表4の $\mu$ ,  $\sigma$ を計算する場合は $N_x = 21$ ,  $N_y = 11$ 、3.2で述べたLSAでは計算時間を短縮するために $N_x = 21$ ,  $N_y = 11$ とした。

#### (2) 変数の組み合わせ

ターゲット投影領域Tとして矩形領域を採用し、 $N$ 、すなわちプロジェクターの数に応じてサイズ $T_x \times T_y$ を変化させた。

また、 $(p_n)_x$ の定義領域 $[-T_x/2, T_x/2]$ を $N_x \in \mathbb{N}$ 個の等分割し、 $N_x + 1$ 点から重複なく $N$ 点を $(p_n)_x$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ )として選択し、 $(p_n)_x$ は $p_n$ のx成分を表す。なお、 $(p_n)_x$ ,  $(p_{n+1})_x$ 、すなわち、隣接する2つのパンジョイントの位置は、それらの間の距離が $k_x \Delta p_x$ 、ここで $k_x \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta p_x = T_x / N_x$ を超えるように選択した。

また、 $-30^\circ$  から $30^\circ / 5^\circ$  までの13個の値のいずれかをそれぞれ $\theta_n^p$ ,  $\theta_n^t$ ,  $\theta_n^r$ に割り当てた。

以上の条件の下で、変数のすべての組み合わせの数は $C_N \times 13^{3N}$ で表され、ここで $N = N_x - k_x$  ( $N - 1$ ) +  $N$ 。本研究では、表1に示す2つの条件下で実験を行った。

#### 3) 計算プラットフォーム

ゲームエンジンUnityを開発環境として使用し、Intel Core™ i7-12700H pro-を使用した。

permutations generated in steps (b) and (d),

$$i_1^e \rightarrow i_2^e \rightarrow i_3^e \rightarrow v_{n,4} \rightarrow i_4^e \rightarrow v_1^T \rightarrow$$

### 5.9 Luminance Evaluation

The method to evaluate the luminance inside  $\mathcal{T}$  is discussed below.

We Assume that each projector is an ideal projector with uniform illuminance distribution on the plane perpendicular to the light direction, and the wall surface  $\mathcal{W}$  is Lambertian surface (see Fig.14).

From the inverse-square law of illuminance, the luminance indicator  $L(p)$  is expressed as

$$L(p) = \frac{L'(p)}{L_{ref}} = \frac{d_{ref}^2}{\{d(s_n, p)\}^2},$$

where  $L'(p)$  denotes the luminance at a point  $p \in \mathbb{R}^3$ ,  $L_{ref}$  denotes the luminance in the preset reference distance  $d_{ref}$ , and  $d(s_n, p)$  denotes the distance between the light source  $s_n$  and the plane including  $p$  and perpendicular to the light direction (see Fig.14).

Besides, the luminance indicator  $L_{blend}(p)$  after performing “Intensity Blending”<sup>10)</sup> is expressed as

$$L_{blend}(p) = \frac{L'_{blend}(p)}{L_{ref}} = \frac{d_{ref}^2}{l} \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{l_n}{\{d(s_n, p)\}^2},$$

$$l = \sum_{n \in \mathcal{N}} l_n, \quad l_n = \min \{u, v, 1 - u, 1 - v\},$$

$$\mathcal{N} = \{n | p \in \mathcal{P}_n\},$$

where  $L'_{blend}(p)$  denotes the luminance at the point  $p$  after performing “Intensity Blending”, and  $(u, v)$  is the coordinate of the intersection of  $\mathcal{P}^{ref}$  and a straight line connecting  $s_n$  and  $p$ , projected onto a square with each side of length 1 (see Fig.15).

Finally, the average  $\mu$  and the standard deviation  $\sigma$  of  $L_{blend}(p_{n_x, n_y})$  are computed, where  $p_{n_x, n_y}$  denotes each point of  $N_x \times N_y$  lattice points preset inside  $\mathcal{T}$ .

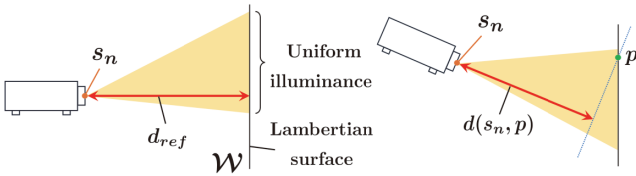


Fig. 14 Assumption for the luminance evaluation.

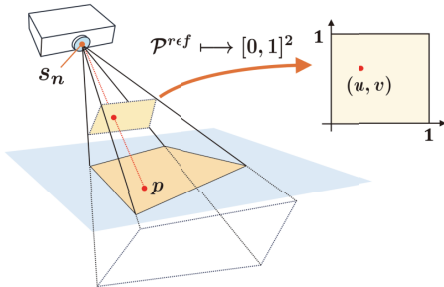


Fig. 15 Projection of the intersection onto the square.

## 6. Experiments

### 6.1 Presuppositions

We conducted experiments assuming that each projector was fixed to the same size tripod via a head with its fixing angle adjustable and that the tripods were arranged in a row parallel to the wall. However, if heaven and earth are reversed, this situation is the same as that mentioned in section 1 where projectors are fixed to the rail equipped beneath the ceiling.

#### (1) Values

We adopted the following values:

Regarding the values described in 3.1,  $r_{p2t} = (0, 0.1, 0.1)$ ,  $r_{t2r} = (0.1, 0.1, 0)$ ,  $r_{r2s} = (0, 0.1, 0.1)$ ,  $(p_n)_y = 0.5$ ,  $(p_n)_z = 3$ , where  $(p_n)_y$ ,  $(p_n)_z$  denote  $y$ -,  $z$ -components of  $p_n$  respectively;

Regarding the values described in 5.1,  $H = 0.536$ ,  $W = 1.6 \times H$ ,  $L_x = 0$ ,  $L_y = 0.4 \times H$ ;

Regarding the values described in 5.7 and 5.9,  $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$ ,  $d_{ref} = 2.8$ . Note that the value 2.8 is the distance between the light source  $s_n$  and the planar wall surface  $\mathcal{W}$  in the reference projection state ( $\theta_n^p = \theta_n^t = \theta_n^r = 0$ );

Regarding the values described in 5.9,  $N_x = 201$ ,  $N_y = 101$  in the final projection quality evaluation, i.e., when computing  $\mu, \sigma$  in Table 3 and Table 4, while  $N_x = 21$ ,  $N_y = 11$  during LSA described in 3.2 to reduce computation time.

#### (2) Combination of Variables

We adopted a rectangular area as the target projection area  $\mathcal{T}$  and changed the size  $\mathcal{T}_x \times \mathcal{T}_y$  according to  $N$ , i.e., the number of projectors.

Besides, the definition area  $[-\mathcal{T}_x/2, \mathcal{T}_x/2]$  of  $(p_n)_x$  was divided into  $N_x \in \mathbb{N}$  equal parts, and  $N$  points were selected from the  $N_x + 1$  points without duplication as  $(p_n)_x$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), where  $(p_n)_x$  denotes  $x$ -component of  $p_n$ . Note that  $(p_n)_x$ ,  $(p_{n+1})_x$ , i.e., the positions of 2 adjacent pan joints were selected so that the distance between them was more than  $k_x \Delta p_x$ , where  $k_x \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta p_x = \mathcal{T}_x / N_x$ .

In addition, any of 13 values from  $-30^\circ$  to  $30^\circ$  per  $5^\circ$  was assigned to  $\theta_n^p, \theta_n^t, \theta_n^r$  respectively.

Under the above conditions, the number of all combinations of variables is expressed as  $_{N'}C_N \times 13^{3N}$ , where  $N' = N_x - k_x(N - 1) + N$ . In this study, experiments under 2 conditions shown in Table 1 were conducted.

#### (3) Computing Platform

We used the game engine Unity<sup>®</sup> as a development environment, and used Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> i7-12700H pro-

表1 実験の前提条件

| $N$ | $\mathcal{T}_x \times \mathcal{T}_y$ | $N_x$ | $k_x$ | Combinations          |
|-----|--------------------------------------|-------|-------|-----------------------|
| 4   | $4 \times 2$                         | 10    | 2     | $1.63 \times 10^{15}$ |
| 8   | $6 \times 3$                         | 20    | 2     | $1.63 \times 10^{30}$ |

Table 2 実験1の結果。

| $N$ | Feasible               | Time[s] |
|-----|------------------------|---------|
| 4   | 34 / $1.0 \times 10^7$ | 604     |
| 8   | 0 / $1.0 \times 10^7$  | 2300    |

Table 3 実験2の結果。

| $N$ | Feasible  | $E_1$ | $\mu$ | $\sigma$ | Time[s] |
|-----|-----------|-------|-------|----------|---------|
| 4   | 100 / 100 | 0.117 | 1.01  | 0.0550   | 48.1    |
| 8   | 100 / 100 | 0.102 | 0.887 | 0.131    | 249     |

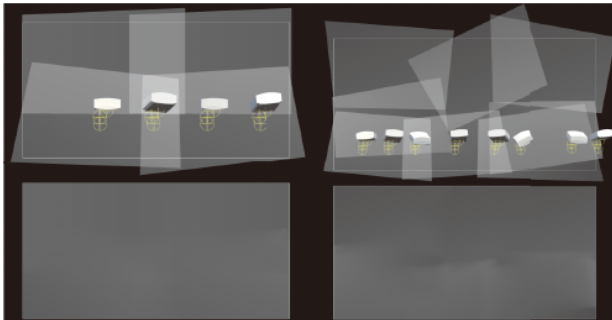


Fig. 16 実験2(「強度混合」を行う前/行った後のプロジェクター4個または8個による投影)の最適解。

CPUとしてのセッサー

## 6.2 実験1

### (1) Purpose

この問題に実現可能な解が現れる確率を調べる。

### (2) 方法

6.1(2)に記載されたものの中から無作為に選択された1,000万の変数の組み合わせのそれぞれについて、4.1に記載された実行可能性の決定が行われた。

### (3) 結果と考察

この結果から、この問題では実行可能な解が出現することは非常に稀であることがわかる(表2参照)。

## 6.3 実験2

### (1) 目的

実現可能な解が以下の通りであることを実験的に確認する。

提案手法により確実に得られる。

### (2) 方法

提案手法により、互いに異なる100個の最適解を計算し、その中で $f(x)$ が最も小さい解を最終解として決定した。

### (3) 結果と考察

5つの最終解における実行可能解の平均数と $E_1$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ の平均値を示す。

Table 4 実験3の結果。

| $N$ | Feasible   | $E_1$ | $\mu$ | $\sigma$ | Time[s] |
|-----|------------|-------|-------|----------|---------|
| 4   | 35.6 / 100 | 0.116 | 1.01  | 0.0574   | 50.9    |
| 8   | 0 / 100    | 0.839 | 0.912 | 0.156    | 187     |

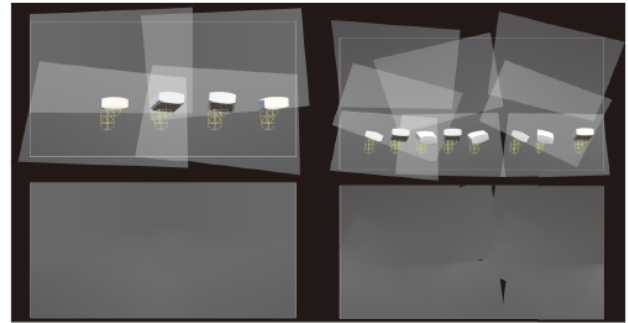


Fig. 17 実験3(「強度混合」を行う前/行った後のプロジェクター4個または8個による投影)の最適解。

を表3に、その中で最も良い解を図16に示す。なお、表3の「Feasible」欄は、100個の最適解のうち、平均していくつの解が実現可能であったか、すなわち、実現可能な解が得られる確率を意味する。表3より、提案手法で計算された最適解はすべて実現可能であることがわかる。また、図16は、上記の前提条件の下で、 $p_n$ の $x$ 成分に対して非対称な配置が最適であることを示しており、プロジェクターを両側対称に配置するのが最適であるという予想に反している。

## 6.4 実験3

### (1) 目的

実現可能性を特に考慮することなく、先行技術と同様に実現不可能な解が得られることを実験的に確認すること<sup>2)-4)</sup>。

### 2) 方法

基本的に実験2と同じ方法を採用したが、5.7で説明した目的関数 $f(x)$ は、4.1で説明した実行可能性の決定なしに最小化された。

### (3) 結果と考察

実験2と同様に、平均結果を表4に、最適解を図17に示す。4台のプロジェクターの配置については、最適解は実現可能であったが(図17左参照)、計算された最適解の64.4%は実現不可能であった(表4参照)。8台のプロジェクターの配置について、計算された最適解はすべて実行不可能であった(図17と表4の右参照)。

## 6.5 実験4

### (1) 目的

を用いた/用いない各収束を可視化する。

**Table 1** Presuppositions of experiments.

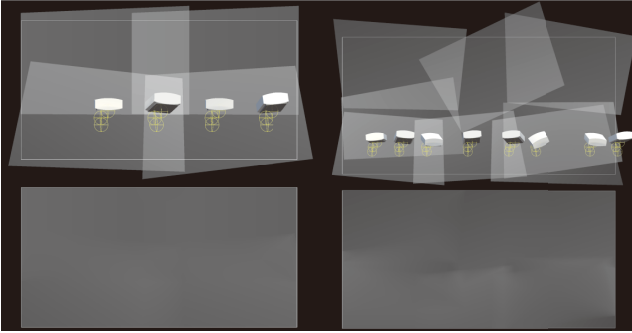
| $N$ | $\mathcal{T}_x \times \mathcal{T}_y$ | $N_x$ | $k_x$ | Combinations          |
|-----|--------------------------------------|-------|-------|-----------------------|
| 4   | $4 \times 2$                         | 10    | 2     | $1.63 \times 10^{15}$ |
| 8   | $6 \times 3$                         | 20    | 2     | $1.63 \times 10^{30}$ |

**Table 2** Result of Experiment 1.

| $N$ | Feasible               | Time[s] |
|-----|------------------------|---------|
| 4   | 34 / $1.0 \times 10^7$ | 604     |
| 8   | 0 / $1.0 \times 10^7$  | 2300    |

**Table 3** Result of Experiment 2.

| $N$ | Feasible  | $E_1$ | $\mu$ | $\sigma$ | Time[s] |
|-----|-----------|-------|-------|----------|---------|
| 4   | 100 / 100 | 0.117 | 1.01  | 0.0550   | 48.1    |
| 8   | 100 / 100 | 0.102 | 0.887 | 0.131    | 249     |


**Fig. 16** The best solution of Experiment 2 (Projection by 4 or 8 projectors before/after performing “Intensity Blending”).

cessor as a CPU.

## 6.2 Experiment 1

### (1) Purpose

To investigate the probability of feasible solutions appearing in this problem.

### (2) Method

For each of 10 million variable combinations randomly selected among those described in 6.1 (2), the feasibility determination described in 4.1 was performed.

### (3) Result & Discussion

The result shows that feasible solutions appear very rarely in this problem (see Table 2).

## 6.3 Experiment 2

### (1) Purpose

To experimentally confirm that feasible solutions are obtained certainly by the proposed method.

### (2) Method

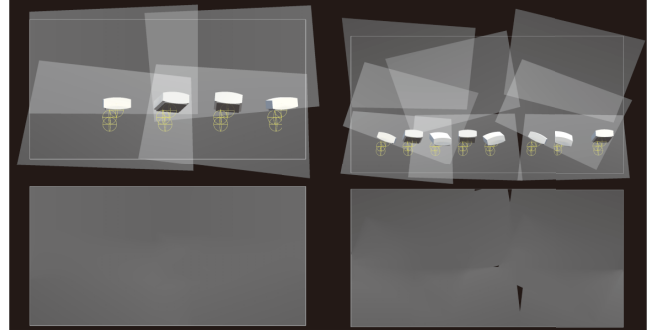
100 optimal solutions different from each other were computed by the proposed method, and the solution with the smallest  $f(x)$  among them was determined as a final solution.

### (3) Result & Discussion

The average number of feasible solutions and the average values of  $E_1, \mu, \sigma$  in 5 final solutions are shown

**Table 4** Result of Experiment 3.

| $N$ | Feasible   | $E_1$ | $\mu$ | $\sigma$ | Time[s] |
|-----|------------|-------|-------|----------|---------|
| 4   | 35.6 / 100 | 0.116 | 1.01  | 0.0574   | 50.9    |
| 8   | 0 / 100    | 0.839 | 0.912 | 0.156    | 187     |


**Fig. 17** The best solution of Experiment 3 (Projection by 4 or 8 projectors before/after performing “Intensity Blending”).

in Table 3, and the best solution among them is shown in Fig.16. Note that the “Feasible” column in Table 3 means how many solutions among the 100 optimal ones were feasible on average, i.e., the probability of obtaining feasible solutions. Table 3 shows that all optimal solutions computed by the proposed method were feasible. Besides, Fig.16 shows that the best solution was an asymmetric arrangement for  $x$ -component of  $p_n$  under the presuppositions described above, against our expectation that it would be the best to arrange the projectors in bilateral symmetry.

## 6.4 Experiment 3

### (1) Purpose

To experimentally confirm that infeasible solutions are obtained similarly as prior arts<sup>2)-4)</sup> without any special consideration of feasibility.

### (2) Method

Basically the same method as Experiment 2 was adopted, but the objective function  $f(x)$  described in 5.7 was minimized without any feasibility determination described in 4.1.

### (3) Result & Discussion

Similarly as Experiment 2, the average results are shown in Table 4, and the best solution is shown in Fig.17. Regarding 4 projectors’ arrangements, the best solution was feasible (see the left of Fig.17), but 64.4% of the computed optimal solutions were infeasible (see Table 4). Regarding 8 projectors’ arrangements, all the computed optimal solutions were infeasible (see the right of Fig.17 and Table 4).

## 6.5 Experiment 4

### (1) Purpose

To visualize each convergence with/without the

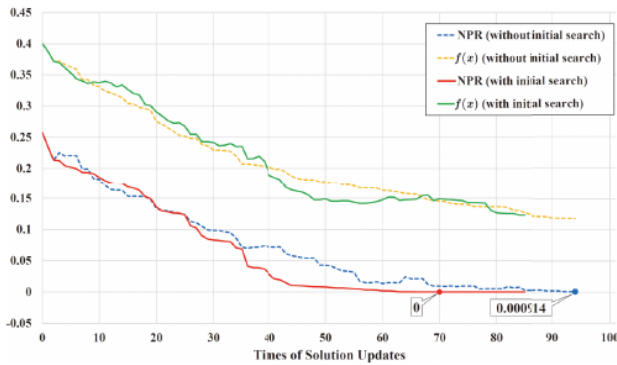


Fig. 18 NPRと $f(x)$ 遷移の例(8個のプロジェクター)。

4.2で説明した初期実行可能解を探索する。

#### (2) 方法

同じ初期実行不可能解から出発したNPRと $f(x)$ の値を、初期探索の有無にかかわらず $f(x)$ を最小化することに関して記録した。

#### (3) 結果と考察

8台のプロジェクターの最適化例を図18に示す。この例では、NPRは初期探索で70回の解更新後に0(すなわち、NPAが存在しないこと)に達したが、そうでない場合はそうではなかった。

### 7. おわりに

本研究では、多角形の境界の交点に着目し、NPAが存在するかどうかを判断する条件を明らかにした(4.1参照)。また、実現可能な解が出現することは非常に稀であり(6.2参照)、実現不可能な最適解は実現可能性を特に考慮することなく計算されるが(6.4参照)、初期実現可能解を計算する新しい方法を採用することにより、実現可能な最適解は確実に得られた(6.3参照)(4.2参照)。

本研究では、平面的な壁面への適用についてのみ議論したが、提案した方法は、他の形状、例えば、複数の平面と単純な曲面の組み合わせの壁面にも適用できる可能性があり、したがって、我々の次の目標は、このような壁面に適用可能な実現可能性決定条件を一般化することである。

また、本研究ではマルチスタートアプローチを採用したが、メタヒューリスティクスアプローチと呼ばれるより高度な手法(遺伝的アルゴリズムなど)は、より正確な最適化を実現できる可能性がある。

#### References

- 1) K. Sugimoto and N. Hashimoto : “Scalable Wide-Area Projection System”, ITE Technical Report Volume 46 Number 10, pp. 205-208 (Mar. 1, 2022)
- 2) S. Shimazu, D. Iwai and K. Sato : “Optimal Placement of Multiple Projectors for Projection-Based Mixed Reality by Considering Spatial Resolution”, Transactions of the Virtual Reality Society of Japan Volume 17 Number 3, pp.261-268 (Sep. 30, 2012)

- 3) T. Matsumura and N. Hashimoto : “A Study of Placement of Multiple Projectors for Surrounding Projection Mapping”, Proceedings of the 2016 ITE Winter Annual Convention, 14C-6 (Dec. 21-22, 2016)
- 4) M. Aoki and N. Hashimoto : “A Study of Exploring Optimal Projector Placement for Wide-Area Projection Through Multi-Objective Optimization and VR Simulation”, ITE Technical Report Volume 48 Number 8, pp.165-168 (Feb. 27, 2024)
- 5) D. Li, J. Xie, L. Zhao, L. Zhou and D. Weng : “Multi-projector auto-calibration and placement optimization for non-planar surfaces”, Optical Review Volume 22, pp. 762-778 (Jul. 21, 2015)
- 6) D. Li, D. Wang and D. Weng : “Non-planar projection performance evaluation and projector pose optimization”, Journal of the Society for Information Display Volume 26 Issue 6, pp.352-368 (May 4, 2018)
- 7) N. Kobayashi : “Information Processing Apparatus, Information Processing Method, and Program”, United States Patent Application Publication No. US 2020/0112707 A1 (Apr. 9, 2020)
- 8) T. Hiraki, T. Hayase, Y. Ike, T. Tsuboi and M. Yoshiwaki : “Viewpoint Planning of Projector Placement for Spatial Augmented Reality using Star-Kernel Decomposition”, Proceedings of 2021 IEEE Conference on Virtual Reality and 3D User Interfaces Abstracts and Workshops, pp.583-584 (Mar. 27 - Apr. 1, 2021)
- 9) A. J. Law, D. G. Aliaga and A. Majumder : “Projector Placement Planning for High Quality Visualizations on Real-World Colored Objects”, Proceedings of IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics Volume 16 Number 6, pp.1633-1641 (Oct. 24-29, 2010)
- 10) R. Raskar, J. V. Baar and J. X. Chai : “A Low-Cost Projector Mosaic with Fast Registration”, Proceedings of the Fifth Asian Conference on Computer Vision, pp.164-169 (Jan. 23-25, 2002)
- 11) D. Sunday : “Inclusion of a Point in a Polygon”, <https://web.archive.org/web/20130126163405/http://geomalgorithms.com/a03-inclusion.html> (Jan. 26, 2013)

#### 付録

提案手法の数学的背景を以下に説明する。

#### A. 2 ポリゴン境界

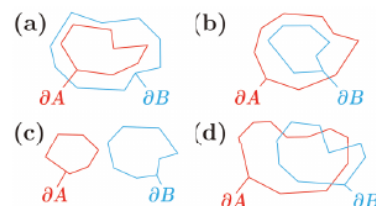
##### A.1 分類(Classification)

任意の単純な閉曲線 $\partial C$ は、平面を2つの領域、すなわち境界のある内部領域 $C$ と境界のない外部領域 $\bar{C}$ に分割する(ヨルダン曲線定理)。したがって、5.3節で説明した仮定のもとで、2つの多角形の境界 $\partial A$ 、 $\partial B$ の関係は、以下の4つのグループに分類できる(各例をapp.Fig. 1に示す)：

- (a)  $\partial A \subset B$
- (b)  $\partial B \subset A$
- (c)  $(\partial A \subset \bar{B}) \wedge (\partial B \subset \bar{A})$
- (d)  $\partial A \otimes \partial B$

where

$$\partial A \otimes \partial B := (\partial A \cap B = \partial) \wedge \partial A \cap B = \partial \emptyset$$



app.Fig. 1  $\partial A$ と $\partial B$ の関係。

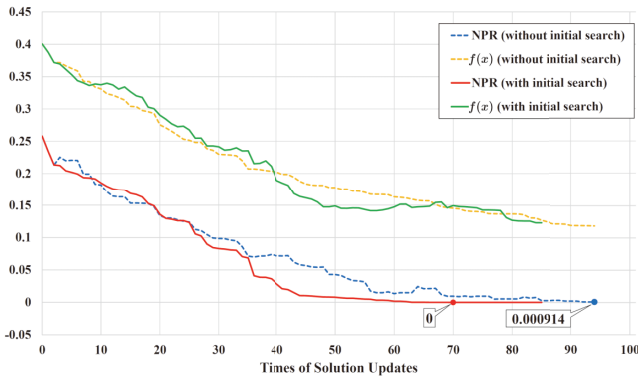


**Fig. 18** An example of NPR and  $f(x)$  transitions (8 projectors).

search for an initial feasible solution described in 4.2.

## (2) Method

The values of NPR and  $f(x)$  starting from the same initial infeasible solution were logged with respect to minimizing  $f(x)$  with/without the initial search.

## (3) Result & Discussion

An example of 8 projectors' optimization is shown in Fig.18. In this example, NPR reached 0 (i.e., non-existence of NPAs) after 70 solution updates with the initial search, while did not without it.

## 7. Conclusion

In this study, we focused on intersections of polygonal boundaries and clarified the conditions for determining whether NPAs exist or not (see 4.1). Besides, although feasible solutions appear very rarely (see 6.2) and the infeasible optimal solutions are computed without any special consideration of feasibility (see 6.4), the feasible optimal solutions were certainly obtained (see 6.3) by adopting a new method to compute an initial feasible solution (see 4.2).

This study only discussed application to a planar wall surface, but the proposed method can be potentially applied to walls of other shapes, e.g., a combination of multiple planar surfaces and a simple curved surface, thus our next goal is to generalize the feasibility determination conditions applicable to such wall surfaces.

Besides, although multi-start approach was adopted in this study, more advanced methods called meta-heuristic approaches (e.g., genetic algorithm) may achieve more accurate optimization.

## References

- 1) K. Sugimoto and N. Hashimoto : "Scalable Wide-Area Projection System", ITE Technical Report Volume 46 Number 10, pp. 205-208 (Mar. 1, 2022)
- 2) S. Shimazu, D. Iwai and K. Sato : "Optimal Placement of Multiple Projectors for Projection-Based Mixed Reality by Considering Spatial Resolution", Transactions of the Virtual Reality Society of Japan Volume 17 Number 3, pp.261-268 (Sep. 30, 2012)

- 3) T. Matsumura and N. Hashimoto : "A Study of Placement of Multiple Projectors for Surrounding Projection Mapping", Proceedings of the 2016 ITE Winter Annual Convention, 14C-6 (Dec. 21-22, 2016)
- 4) M. Aoki and N. Hashimoto : "A Study of Exploring Optimal Projector Placement for Wide-Area Projection Through Multi-Objective Optimization and VR Simulation", ITE Technical Report Volume 48 Number 8, pp.165-168 (Feb. 27, 2024)
- 5) D. Li, J. Xie, L. Zhao, L. Zhou and D. Weng : "Multi-projector auto-calibration and placement optimization for non-planar surfaces", Optical Review Volume 22, pp. 762-778 (Jul. 21, 2015)
- 6) D. Li, D. Wang and D. Weng : "Non-planar projection performance evaluation and projector pose optimization", Journal of the Society for Information Display Volume 26 Issue 6, pp.352-368 (May 4, 2018)
- 7) N. Kobayashi : "Information Processing Apparatus, Information Processing Method, and Program", United States Patent Application Publication No. US 2020/0112707 A1 (Apr. 9, 2020)
- 8) T. Hiraki, T. Hayase, Y. Ike, T. Tsuboi and M. Yoshiwaki : "Viewpoint Planning of Projector Placement for Spatial Augmented Reality using Star-Kernel Decomposition", Proceedings of 2021 IEEE Conference on Virtual Reality and 3D User Interfaces Abstracts and Workshops, pp.583-584 (Mar. 27 - Apr. 1, 2021)
- 9) A. J. Law, D. G. Aliaga and A. Majumder : "Projector Placement Planning for High Quality Visualizations on Real-World Colored Objects", Proceedings of IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics Volume 16 Number 6, pp.1633-1641 (Oct. 24-29, 2010)
- 10) R. Raskar, J. V. Baar and J. X. Chai : "A Low-Cost Projector Mosaic with Fast Registration", Proceedings of the Fifth Asian Conference on Computer Vision, pp.164-169 (Jan. 23-25, 2002)
- 11) D. Sunday : "Inclusion of a Point in a Polygon", <https://web.archive.org/web/20130126163405/http://geomalgorithms.com/a03-inclusion.html> (Jan. 26, 2013)

## Appendix

The mathematical background of the proposed method is discussed below.

### A. 2 Polygonal Boundaries

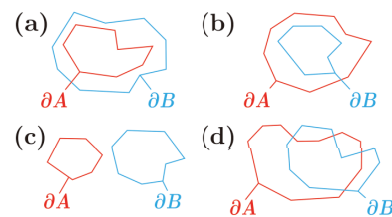
#### A.1 Classification

Any simple closed curve  $\partial C$  divides the plane into 2 regions; a bounded interior region  $C$  and an unbounded exterior region  $\bar{C}$  (Jordan curve theorem). Accordingly, under the assumption described in section 5.3, the relationships between 2 polygonal boundaries  $\partial A, \partial B$  can be classified into the following 4 groups (each example is shown in app.Fig.1):

- (a)  $\partial A \subset B$
- (b)  $\partial B \subset A$
- (c)  $(\partial A \subset \bar{B}) \wedge (\partial B \subset \bar{A})$
- (d)  $\partial A \otimes \partial B$

where

$$\partial A \otimes \partial B := (\partial A \cap B \neq \emptyset) \wedge (\partial A \cap \bar{B} \neq \emptyset)$$



**app.Fig. 1** Relationships between  $\partial A$  and  $\partial B$ .

$$\wedge (\partial B \cap A \neq \emptyset) \wedge (\partial B \cap \bar{A} \neq \emptyset).$$

なお、交点は関係式(d)に存在するが、それ以外は存在しない。

#### A.2 関係(a)-(c)

頂点  $a \in A$ ,  $b \in B$  が既知であれば、両者の関係は inside/outside determination<sup>11)</sup>により以下のように決定できる:

- (a)  $a \in B \implies \partial A \subset B$ ,
- (b)  $b \in A \implies \partial B \subset A$ ,
- (c) Otherwise,  $(\partial A \subset \bar{B}) \wedge (\partial B \subset \bar{A})$ .

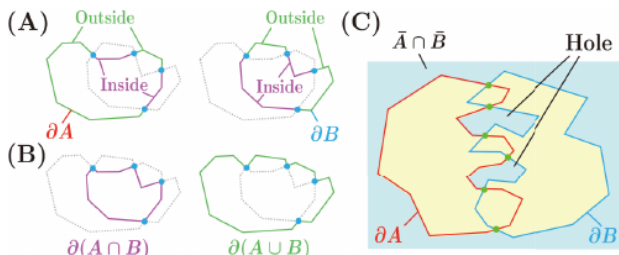
#### A.3 関係(d)

##### (1) $\partial A$ と $\partial B$ の接続

$\partial A \cap B$  と  $\partial A \cap \bar{B}$  のセクションは、交差点で切り替わると  $\partial A$  に沿って交互に現れ、それは  $\partial B$  と同じである (app. Fig. 2 (A) 参照)。したがって、境界  $\partial(A \cap B)$  は  $\partial A \cap B$  と  $\partial B \cap A$  の区間を結ぶことで得られ、境界  $\partial(A \sim B)$  は  $\partial A \cap \bar{B}$  と  $\partial B \cap \bar{A}$  の区間を結ぶことで得られる (app. Fig. 2(B) 参照)。以下、前者の接続方式を「AND 接続」、後者の接続方式を「OR 接続」と呼ぶ。

##### (2) Hole

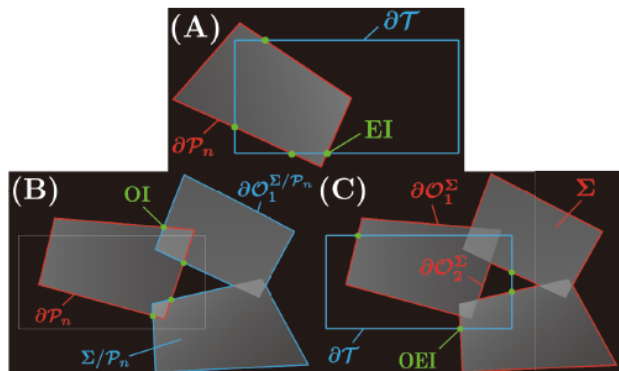
領域  $A \cap B$  に穴がある場合、 $\partial A$  と  $\partial B$  の交点が存在する (app. Fig. 2 (C) 参照)。



app. Fig. 2 関係(d)についての考察。

#### A.4 本研究における交差点

エッジ交差(EI)は、 $\partial P_n$  と  $\partial T$  の下での  $\partial P_n$ 、 $\partial T$  の交点である (app. Fig. 3 (A) 参照)。なお、境界  $\partial(P_n \cap T)$  は  $\partial P_n$ 、 $\partial T$  の AND



app. Fig. 3 Consideration on EIs, OIs and OEIs.

接続によって得られる。

外側交点(OI)は、 $\partial P_n$ 、 $\partial O_k^{\Sigma/P_n}$  の交点であり、 $\partial P_n$ 、 $\partial O_k^{\Sigma/P_n}$  の下である (app. 3 (B) 参照)。ここで、 $\partial O_k^{\Sigma/P_n}$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) は  $\partial(\Sigma/P_n)$  の各多角形境界を表し、 $\Sigma/P_n = \bigcup_{k=1}^K P_n$ 。境界  $\partial$  は  $\partial P_n$ 、 $\partial O_k^{\Sigma/P_n}$  の複数の OR 接続によって得られることに注意。

外縁交差(OEI)は、 $\partial O_k^{\Sigma}$  と  $\partial T$  の下での  $\partial O_k^{\Sigma}$ 、 $\partial T$  の交点である (app. Fig. 3 (C) 参照)。ここで、 $\partial O_k^{\Sigma}$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) は  $\partial$  の各多角形境界を表す。なお、境界  $\partial(\Sigma \cap T)$  は、 $\partial O_k^{\Sigma}$ 、 $\partial T$  の複数の AND 接続によって求めることができる。

#### B. 実現可能な条件

4.1で述べた3つの条件を導出した理由については、後述する。

なお、以下の議論は、以下のことを前提としている。

$$\forall \partial C_1, \forall \partial C_2 \in \partial C, \partial C_1 \neq \partial C_2,$$

$$\partial C_1 \cap \partial C_2 \neq \emptyset \iff \partial C_1 \otimes \partial C_2,$$

ここで、 $\partial C$  は平面  $R^2$  におけるすべての単純閉曲線の集合を表す。

##### B.1 調製方法

レンマ。与えられた  $\partial A$ ,  $\partial B \in \partial C$  に対して、もし

$$\exists \partial C \in \partial C, (\partial C \subset A \cup B) \wedge (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \neq \emptyset),$$

then  $\partial A \cap \partial B \cap C \neq \emptyset$ .

証明する。領域  $A \sim B$  が非有界領域、すなわち  $\partial(A \sim B) \in \partial C$  からなり、領域  $A \sim B$  が有界領域からなる場合。

$\partial C \subset A \cup B \iff C \subset A \cup B \iff \bar{A} \cap \bar{B} \cap C = \emptyset$ , which contradicts the condition  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \neq \emptyset$ .

したがって、領域  $A \sim B$  は、少なくとも1つの有界領域  $D_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) を含み、各領域は残りの領域と切断される。

$$\forall l, \partial D_l \in \partial C, \partial D_l \subset \partial(A \cup B). \quad (\text{app.1})$$

The relationships between  $\partial C$  and  $\partial D_l$  are divided into 3 groups:  $\partial C \subset D_l$ ,  $\partial C \otimes \partial D_l$  and  $\partial C \subset \bar{D}_l$ , but if  $\exists l, \partial C \otimes \partial D_l$  or if  $\exists l, \partial C \subset \bar{D}_l$ ,

$$\exists l, \partial C \otimes \partial D_l \iff \exists l, \partial C \cap \bar{D}_l \neq \emptyset$$

$$\implies \partial C \cap \bar{A} \cup \bar{B} \neq \emptyset,$$

$$\exists l, \partial C \subset \bar{D}_l \iff \partial C \subset \bigcup \bar{D}_l \implies \partial C \subset \bar{A} \cup \bar{B},$$

lは条件  $\partial C \subset A \cap B$  に矛盾する。

$$\therefore \forall l, \partial C \subset D_l.$$

Besides,

$$\forall l, \partial C \subset D_l \iff (\forall l, \partial D_l \subset \bar{C}) \vee (\exists l, \partial D_l \subset C),$$

$$\therefore \partial C \subset D_l \iff (\partial D_l \subset \bar{C}) \vee (\partial D_l \subset C).$$

If  $\forall l, \partial D_l \subset \bar{C}$ , i.e.,  $\nexists l, \partial D_l \subset C$ ,

$$\partial C \subset A \cup B \iff C \subset A \cup B \iff \bar{A} \cap \bar{B} \cap C = \emptyset,$$

which contradicts the condition  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \neq \emptyset$ .

$$\wedge (\partial B \cap A \neq \emptyset) \wedge (\partial B \cap \bar{A} \neq \emptyset).$$

Note that the intersections exist in the relationship (d), otherwise do not exist.

### A.2 Relationships (a)-(c)

If vertices  $a \in \partial A$  and  $b \in \partial B$  are known, the relationship between them can be determined by the inside/outside determination<sup>(1)</sup> as follows:

- (a)  $a \in B \implies \partial A \subset B$ ,
- (b)  $b \in A \implies \partial B \subset A$ ,
- (c) Otherwise,  $(\partial A \subset \bar{B}) \wedge (\partial B \subset \bar{A})$ .

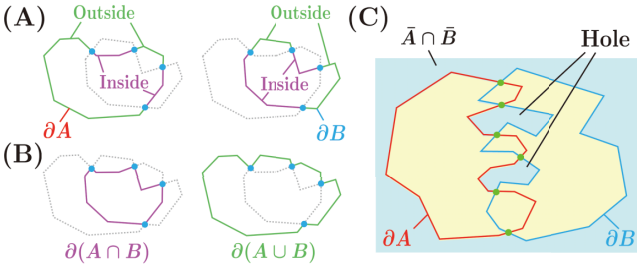
### A.3 Relationship (d)

#### (1) Connection of $\partial A$ and $\partial B$

The sections  $\partial A \cap B$  and  $\partial A \cap \bar{B}$  appear alternatively along  $\partial A$  as switched at the intersections, and that is the same with  $\partial B$  (see app.Fig.2 (A)). Therefore, the boundary  $\partial(A \cap B)$  can be obtained by connecting the sections  $\partial A \cap B$  and  $\partial B \cap A$ , while the boundary  $\partial(A \cup B)$  can be obtained by connecting the sections  $\partial A \cap \bar{B}$  and  $\partial B \cap \bar{A}$  (see app.Fig.2 (B)). Hereinafter, the former connecting method is termed “AND Connection”, and the latter one is termed “OR Connection”.

#### (2) Hole

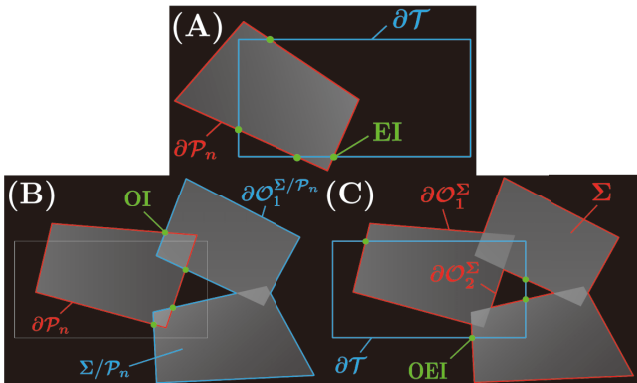
If the region  $\bar{A} \cap \bar{B}$  includes a hole, then there exist intersections of  $\partial A$  and  $\partial B$  (see app.Fig.2 (C)).



app.Fig. 2 Consideration on the relationship (d).

### A.4 Intersections in This Study

Edge Intersections (EIs) are the intersections of  $\partial \mathcal{P}_n, \partial \mathcal{T}$  under  $\partial \mathcal{P}_n \otimes \partial \mathcal{T}$  (see app.Fig.3 (A)). Note that the boundary  $\partial(\mathcal{P}_n \cap \mathcal{T})$  can be obtained by AND Con-



app.Fig. 3 Consideration on EIs, OIs and OEIs.

nection of  $\partial \mathcal{P}_n, \partial \mathcal{T}$ .

Outer Intersections (OIs) are the intersections of  $\partial \mathcal{P}_n, \partial \mathcal{O}_{k'}^{\Sigma/\mathcal{P}_n}$  under  $\partial \mathcal{P}_n \otimes \partial \mathcal{O}_{k'}^{\Sigma/\mathcal{P}_n}$  (see app.Fig.3 (B)), where  $\partial \mathcal{O}_{k'}^{\Sigma/\mathcal{P}_n}$  ( $k' = 1, 2, \dots, K'$ ) denotes each polygonal boundary of  $\partial(\Sigma/\mathcal{P}_n)$  and  $\Sigma/\mathcal{P}_n = \bigcup_{n' \neq n} \mathcal{P}_{n'}$ . Note that the boundary  $\partial \Sigma$  can be obtained by multiple OR Connections of  $\partial \mathcal{P}_n, \partial \mathcal{O}_{k'}^{\Sigma/\mathcal{P}_n}$ , where  $\Sigma = \bigcup_n \mathcal{P}_n$ .

Outer Edge Intersections (OEIs) are the intersections of  $\partial \mathcal{O}_k^{\Sigma}, \partial \mathcal{T}$  under  $\partial \mathcal{O}_k^{\Sigma} \otimes \partial \mathcal{T}$  (see app.Fig.3 (C)), where  $\partial \mathcal{O}_k^{\Sigma}$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) denotes each polygonal boundary of  $\partial \Sigma$ . Note that the boundary  $\partial(\Sigma \cap \mathcal{T})$  can be obtained by multiple AND Connections of  $\partial \mathcal{O}_k^{\Sigma}, \partial \mathcal{T}$ .

### B. Feasible Conditions

The reason for the derivation of 3 conditions described in 4.1 is discussed below.

Note that the following discussion presupposes

$$\forall \partial C_1, \forall \partial C_2 \in \partial \mathbb{C}, \partial C_1 \neq \partial C_2,$$

$$\partial C_1 \cap \partial C_2 \neq \emptyset \iff \partial C_1 \otimes \partial C_2,$$

where  $\partial \mathbb{C}$  denotes the set of all simple closed curves in the plane  $\mathbb{R}^2$ .

#### B.1 Preparation

**Lemma.** For given  $\partial A, \partial B \in \partial \mathbb{C}$ , if

$$\exists \partial C \in \partial \mathbb{C}, (\partial C \subset A \cup B) \wedge (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \neq \emptyset),$$

then  $\partial A \cap \partial B \cap C \neq \emptyset$ .

**Proof.** If the region  $\bar{A} \cup \bar{B}$  consists of an unbounded region, i.e.,  $\partial(A \cup B) \in \partial \mathbb{C}$  and the region  $A \cup B$  consists of a bounded region,

$$\partial C \subset A \cup B \iff C \subset A \cup B \iff \bar{A} \cap \bar{B} \cap C = \emptyset,$$

which contradicts the condition  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \neq \emptyset$ .

Therefore, the region  $\bar{A} \cup \bar{B}$  includes at least one bounded region  $\bar{\mathcal{D}}_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ), each of which is disconnected with the rest regions, where

$$\forall l, \partial \mathcal{D}_l \in \partial \mathbb{C}, \partial \mathcal{D}_l \subset \partial(A \cup B). \quad (\text{app.1})$$

The relationships between  $\partial C$  and  $\partial \mathcal{D}_l$  are divided into 3 groups:  $\partial C \subset \mathcal{D}_l$ ,  $\partial C \otimes \partial \mathcal{D}_l$  and  $\partial C \subset \bar{\mathcal{D}}_l$ , but if  $\exists l, \partial C \otimes \partial \mathcal{D}_l$  or if  $\exists l, \partial C \subset \bar{\mathcal{D}}_l$ ,

$$\exists l, \partial C \otimes \partial \mathcal{D}_l \iff \exists l, \partial C \cap \bar{\mathcal{D}}_l \neq \emptyset$$

$$\implies \partial C \cap \bar{A} \cup \bar{B} \neq \emptyset,$$

$$\exists l, \partial C \subset \bar{\mathcal{D}}_l \iff \partial C \subset \bigcup_l \bar{\mathcal{D}}_l \implies \partial C \subset \bar{A} \cup \bar{B},$$

which contradicts the condition  $\partial C \subset A \cup B$ .

$$\therefore \forall l, \partial C \subset \mathcal{D}_l.$$

Besides,

$$\forall l, \partial C \subset \mathcal{D}_l \iff (\forall l, \partial \mathcal{D}_l \subset \bar{C}) \vee (\exists l, \partial \mathcal{D}_l \subset C),$$

$$\therefore \partial C \subset \mathcal{D}_l \iff (\partial \mathcal{D}_l \subset \bar{C}) \vee (\partial \mathcal{D}_l \subset C).$$

If  $\forall l, \partial \mathcal{D}_l \subset \bar{C}$ , i.e.,  $\nexists l, \partial \mathcal{D}_l \subset C$ ,

$$\partial C \subset A \cup B \iff C \subset A \cup B \iff \bar{A} \cap \bar{B} \cap C = \emptyset,$$

which contradicts the condition  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \neq \emptyset$ .

$$\therefore \exists l, \partial D_l \subset C. \quad (\text{app.2})$$

また、 $\partial A$ と $\partial B$ の関係は、 $(\partial A \cap \partial B) \vee (\partial B \cap \partial A)$ ,  $\partial A \cap \partial B \cap \partial A$ ,  $\partial A \cap \partial B$  の3群に分けられるが、 $\partial A \cap \partial B$ でなければ領域A  $\partial B$ は非拘束領域のみからなり、領域A  $\partial B$ には残りの領域と切り離された有界領域があるという上記の議論と矛盾する。

$$\therefore \partial A \otimes \partial B.$$

$\partial A \cap \partial B$ を満たす $\partial B$ は5つの部分に分割されることを考えると、 $\partial A \cap \partial B$ ,  $\partial B \cap \partial A$ ,  $\partial A \cap \partial B$ ,  $\partial B \cap \partial A$ ,  $\partial A \cap \partial B$ となる。

$$\partial(A \cup B) = (\partial A \cap \overline{\partial B}) \cup (\partial B \cap \overline{\partial A}) \cup (\partial A \cap \partial B), \quad (\text{app.3})$$

$\partial$ さらに、 $\partial D_l$ を満たす $\partial D_l$ について(式(app.2)参照)、 $\partial A \cap \partial B \cap \partial D_l = \partial$ とすると、 $\partial D_l \cap (A \cap B)$ のため、 $\partial D_l \cap A \cap B \cap (A \cap B)$ (式(app.1)参照)。1))と、 $\partial D_l \in \partial C$ (式(app.1)参照)と矛盾する式(app.3)は、開断面 $\partial A \cap \partial B$ と $\partial B \cap \partial A$ が互いに切断されているため、つまり、 $\partial D_l$ は閉曲線ではなく開曲線である。

$$\therefore \partial A \cap \partial B \cap \partial D_l \neq \emptyset. \quad (\text{app.4})$$

最後に、式(app.2), (app.4)より

$$\begin{aligned} \exists l, (\partial A \cap \partial B \cap \partial D_l \neq \emptyset) \wedge (\partial D_l \subset C) \\ \implies \partial A \cap \partial B \cap C \neq \emptyset. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

## B.2 条件の導出

### (1) 実行不可能な解集合の分類

本研究では、 $\partial T \sim P_n$  と  $\partial P_n \sim T \wedge \partial T \sim P_n$  の関係における解を除外しているので(5.4参照)、普遍解集合Sは次のように定義される。

$$S := \{x | \forall n, (\partial P_n \subset T) \vee (\partial P_n \otimes \partial T)\}. \quad (\text{app.5})$$

Besides,

$$\forall n, (\partial P_n \subset T) \vee (\partial P_n \otimes \partial T) \iff \forall n, P_n \cap T \neq \emptyset$$

$$\iff \left( \bigcup_n P_n \right) \cap T \neq \emptyset \iff \Sigma \cap T \neq \emptyset,$$

$$\therefore S = \{x | \Sigma \cap T \neq \emptyset\}. \quad (\text{app.6})$$

本研究では、実行可能解集合Fを以下のように定義する。

$$F := S \cap C, \quad C = \{x | \overline{\Sigma} \cap T = \emptyset\},$$

hence the infeasible solution set  $\overline{F}$  is denoted by

$$\overline{F} = S \cap \overline{C}, \quad \overline{C} = \{x | \overline{\Sigma} \cap T \neq \emptyset\}. \quad (\text{app.7})$$

式(app.6), (app.7)より、

$$\overline{C} = \{x | (\Sigma \cap T \neq \emptyset) \wedge (\overline{\Sigma} \cap T \neq \emptyset)\}.$$

領域 $\Sigma$ と $\overline{\Sigma}$ の間に境界  $\partial \Sigma$  が存在するからである、

$$(\Sigma \cap T \neq \emptyset) \wedge (\overline{\Sigma} \cap T \neq \emptyset) \iff \partial \Sigma \cap T \neq \emptyset$$

$$\iff \neg(\forall k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \cap T = \emptyset).$$

$\partial \mathcal{O}_k^\Sigma$  と  $\partial T$  の関係は3つのグループに分けられる  
 $\therefore \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset T$ ,  $\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset T$ ,  $\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset \partial T$ ,  $\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset T$ ,  $\cap T =$ ,

$$\neg(\forall k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \cap T = \emptyset) \iff \neg(\forall k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset T)$$

$$\iff \exists k, (\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset T) \vee (\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial T),$$

$$\therefore \overline{C} = \{x | \exists k, (\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset T) \vee (\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial T)\}.$$

Therefore,  $\overline{C}$  can be classified into the following 3 so-  
 リューションセット

$$\overline{C} = S^1 \cup S^2 \cup S^3, \quad (\text{app.8})$$

$$S^1 = \{x | \forall k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset T\},$$

$$S^2 = \{x | \exists k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial T\},$$

$$S^3 = \overline{C} \cap \overline{S^1} \cap \overline{S^2}. \quad (\text{app.9})$$

### (2) Consideration on $S^1$

$$\forall k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset T \iff \bigcup_k \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset T \iff \partial \Sigma \subset T$$

$$\iff \partial \bigcup_n P_n \subset T \iff \forall n, \partial P_n \subset T.$$

式(app.5)で表される前提条件のもとで

$$\forall n, \partial P_n \subset T \iff \exists n, \partial P_n \otimes \partial T$$

$$\iff \forall n, \partial P_n \cap \partial T = \emptyset,$$

となり、EIが存在しないことと等価となる。

$$\therefore S^1 = \overline{S^{EI}}, \quad (\text{app.10})$$

ここで、 $S^{EI}$ はEIを持つ解の集合を表す。

さらに、 $\partial P_n \cap \partial T \cap P_n$  を式(app.5)で表される前提条件で考える、

$$\forall n, \partial P_n \subset T \iff \forall n, \partial T \subset \overline{P_n}$$

$$\iff \partial T \subset \bigcup_n \overline{P_n} \iff \partial T \subset \overline{\Sigma}.$$

$$\therefore S^1 = \{x | \partial T \subset \overline{\Sigma}\}. \quad (\text{app.11})$$

### (3) Consideration on $S^2$

$$\exists k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial T \iff \exists k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \cap \partial T \neq \emptyset,$$

となり、0EIの存在と等価となる。

$$\therefore S^2 = S^{OEI}, \quad (\text{app.12})$$

ここで、 $S^{OEI}$ は0EIを持つ解の集合を表す。

Furthermore,

$$\exists k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial T$$

$$\iff \exists k, (\partial T \cap \mathcal{O}_k^\Sigma \neq \emptyset) \wedge (\partial T \cap \overline{\mathcal{O}_k^\Sigma} \neq \emptyset)$$

$$\iff \left( \partial T \cap \bigcup_k \mathcal{O}_k^\Sigma \neq \emptyset \right) \wedge \left( \partial T \cap \bigcup_k \overline{\mathcal{O}_k^\Sigma} \neq \emptyset \right)$$

$$\iff (\partial T \cap \Sigma \neq \emptyset) \wedge (\partial T \cap \overline{\Sigma} \neq \emptyset).$$

$$\therefore S^2 = \{x | (\partial T \cap \Sigma \neq \emptyset) \wedge (\partial T \cap \overline{\Sigma} \neq \emptyset)\}.$$

$$(\text{app.13})$$

### (4) $S^3$ に関する考察

$\partial T$ と $\Sigma$ の関係は次のように分けられる。

3 groups:  $\partial T \subset \Sigma$ ,  $\partial T \subset \overline{\Sigma}$  and  $(\partial T \cap \Sigma \neq \emptyset) \wedge$

$$\therefore \exists l, \partial \mathcal{D}_l \subset C. \quad (\text{app.2})$$

In addition, the relationships between  $\partial A$  and  $\partial B$  can be divided into 3 groups:  $(\partial A \subset B) \vee (\partial B \subset A)$ ,  $(\partial A \subset \overline{B}) \wedge (\partial B \subset \overline{A})$ ,  $\partial A \otimes \partial B$ , but if not  $\partial A \otimes \partial B$ , the region  $\overline{A \cup B}$  consists of only an unbounded region, which contradicts the above discussion that the region  $\overline{A \cup B}$  includes a bounded region disconnected with the rest regions.

$$\therefore \partial A \otimes \partial B.$$

Considering that  $\partial A, \partial B$  satisfying  $\partial A \otimes \partial B$  are divided into 5 parts:  $\partial A \cap B$ ,  $\partial B \cap A$ ,  $\partial A \cap \overline{B}$ ,  $\partial B \cap \overline{A}$  and  $\partial A \cap \partial B$ ,

$$\partial(A \cup B) = (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\partial B \cap \overline{A}) \cup (\partial A \cap \partial B), \quad (\text{app.3})$$

$$\therefore \partial A \cap B \subset B \subset A \cup B, \quad \partial B \cap A \subset A \subset A \cup B.$$

Furthermore, for  $\partial \mathcal{D}_l$  satisfying  $\partial \mathcal{D}_l \subset C$  (see equation (app.2)), if  $\partial A \cap \partial B \cap \partial \mathcal{D}_l = \emptyset$ , then  $\partial \mathcal{D}_l \subset (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\partial B \cap \overline{A})$  because of  $\partial \mathcal{D}_l \subset \partial(A \cup B)$  (see equation (app.1)) and equation (app.3), which contradicts  $\partial \mathcal{D}_l \in \partial C$  (see equation (app.1)), since the open sections  $\partial A \cap \overline{B}$  and  $\partial B \cap \overline{A}$  are disconnected with each other, that is,  $\partial \mathcal{D}_l$  is an open curve, not a closed curve.

$$\therefore \partial A \cap \partial B \cap \partial \mathcal{D}_l \neq \emptyset. \quad (\text{app.4})$$

Finally, from equations (app.2),(app.4),

$$\exists l, (\partial A \cap \partial B \cap \partial \mathcal{D}_l \neq \emptyset) \wedge (\partial \mathcal{D}_l \subset C)$$

$$\implies \partial A \cap \partial B \cap C \neq \emptyset. \quad \blacksquare$$

## B.2 Conditions Derivation

### (1) Classification of Infeasible Solution Set

Because the solutions in the relationships  $\partial \mathcal{T} \subset \mathcal{P}_n$  and  $(\partial \mathcal{P}_n \subset \overline{\mathcal{T}}) \wedge (\partial \mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{P}_n})$  are excluded in this study (see 5.4), the universal solution set  $\mathcal{S}$  is defined as

$$\mathcal{S} := \{x | \forall n, (\partial \mathcal{P}_n \subset \mathcal{T}) \vee (\partial \mathcal{P}_n \otimes \partial \mathcal{T})\}. \quad (\text{app.5})$$

Besides,

$$\forall n, (\partial \mathcal{P}_n \subset \mathcal{T}) \vee (\partial \mathcal{P}_n \otimes \partial \mathcal{T}) \iff \forall n, \mathcal{P}_n \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$$

$$\iff \left( \bigcup_n \mathcal{P}_n \right) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset \iff \Sigma \cap \mathcal{T} \neq \emptyset,$$

$$\therefore \mathcal{S} = \{x | \Sigma \cap \mathcal{T} \neq \emptyset\}. \quad (\text{app.6})$$

In this study, the feasible solution set  $\mathcal{F}$  is defined as

$$\mathcal{F} := \mathcal{S} \cap \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} = \{x | \overline{\Sigma} \cap \mathcal{T} = \emptyset\},$$

hence the infeasible solution set  $\overline{\mathcal{F}}$  is denoted by

$$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{S} \cap \overline{\mathcal{C}}, \quad \overline{\mathcal{C}} = \{x | \overline{\Sigma} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset\}. \quad (\text{app.7})$$

From equations (app.6),(app.7),

$$\overline{\mathcal{C}} = \{x | (\Sigma \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) \wedge (\overline{\Sigma} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset)\}.$$

Because there exists the boundary  $\partial \Sigma$  between the regions  $\Sigma$  and  $\overline{\Sigma}$ ,

$$(\Sigma \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) \wedge (\overline{\Sigma} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) \iff \partial \Sigma \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$$

$$\iff \neg(\forall k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \cap \mathcal{T} = \emptyset).$$

Considering that the relationships between  $\partial \mathcal{O}_k^\Sigma$  and  $\partial \mathcal{T}$  are divided into 3 groups:  $\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset \mathcal{T}$ ,  $\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset \overline{\mathcal{T}}$  and  $\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial \mathcal{T}$ , and that  $\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset \overline{\mathcal{T}} \iff \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \cap \mathcal{T} = \emptyset$ ,

$$\neg(\forall k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \cap \mathcal{T} = \emptyset) \iff \neg(\forall k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset \overline{\mathcal{T}})$$

$$\iff \exists k, (\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset \mathcal{T}) \vee (\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial \mathcal{T}),$$

$$\therefore \overline{\mathcal{C}} = \{x | \exists k, (\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset \mathcal{T}) \vee (\partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial \mathcal{T})\}.$$

Therefore,  $\overline{\mathcal{C}}$  can be classified into the following 3 solution sets:

$$\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2 \cup \mathcal{S}^3, \quad (\text{app.8})$$

$$\mathcal{S}^1 = \{x | \forall k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset \mathcal{T}\},$$

$$\mathcal{S}^2 = \{x | \exists k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial \mathcal{T}\},$$

$$\mathcal{S}^3 = \overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{S}^1} \cap \overline{\mathcal{S}^2}. \quad (\text{app.9})$$

### (2) Consideration on $\mathcal{S}^1$

$$\forall k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset \mathcal{T} \iff \bigcup_k \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \subset \mathcal{T} \iff \partial \Sigma \subset \mathcal{T}$$

$$\iff \partial \bigcup_n \mathcal{P}_n \subset \mathcal{T} \iff \forall n, \partial \mathcal{P}_n \subset \mathcal{T}.$$

Under the presupposition expressed as equation (app.5),

$$\forall n, \partial \mathcal{P}_n \subset \mathcal{T} \iff \nexists n, \partial \mathcal{P}_n \otimes \partial \mathcal{T}$$

$$\iff \forall n, \partial \mathcal{P}_n \cap \partial \mathcal{T} = \emptyset,$$

which is equivalent to non-existence of EIs.

$$\therefore \mathcal{S}^1 = \overline{\mathcal{S}^{EI}}, \quad (\text{app.10})$$

where  $\mathcal{S}^{EI}$  denotes the set of solutions with EIs.

Furthermore, considering that  $\partial \mathcal{P}_n \subset \mathcal{T} \iff \partial \mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{P}_n}$  under the presupposition expressed as equation (app.5),

$$\forall n, \partial \mathcal{P}_n \subset \mathcal{T} \iff \forall n, \partial \mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{P}_n}$$

$$\iff \partial \mathcal{T} \subset \bigcup_n \overline{\mathcal{P}_n} \iff \partial \mathcal{T} \subset \overline{\Sigma}.$$

$$\therefore \mathcal{S}^1 = \{x | \partial \mathcal{T} \subset \overline{\Sigma}\}. \quad (\text{app.11})$$

### (3) Consideration on $\mathcal{S}^2$

$$\exists k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial \mathcal{T} \iff \exists k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \cap \partial \mathcal{T} \neq \emptyset,$$

which is equivalent to existence of OEIs.

$$\therefore \mathcal{S}^2 = \mathcal{S}^{OEI}, \quad (\text{app.12})$$

where  $\mathcal{S}^{OEI}$  denotes the set of solutions with OEIs.

Furthermore,

$$\exists k, \partial \mathcal{O}_k^\Sigma \otimes \partial \mathcal{T}$$

$$\iff \exists k, (\partial \mathcal{T} \cap \mathcal{O}_k^\Sigma \neq \emptyset) \wedge (\partial \mathcal{T} \cap \overline{\mathcal{O}_k^\Sigma} \neq \emptyset)$$

$$\iff \left( \partial \mathcal{T} \cap \bigcup_k \mathcal{O}_k^\Sigma \neq \emptyset \right) \wedge \left( \partial \mathcal{T} \cap \bigcup_k \overline{\mathcal{O}_k^\Sigma} \neq \emptyset \right)$$

$$\iff (\partial \mathcal{T} \cap \Sigma \neq \emptyset) \wedge (\partial \mathcal{T} \cap \overline{\Sigma} \neq \emptyset).$$

$$\therefore \mathcal{S}^2 = \{x | (\partial \mathcal{T} \cap \Sigma \neq \emptyset) \wedge (\partial \mathcal{T} \cap \overline{\Sigma} \neq \emptyset)\}.$$

$$(\text{app.13})$$

### (4) Consideration on $\mathcal{S}^3$

The relationships between  $\partial \mathcal{T}$  and  $\Sigma$  are divided into 3 groups:  $\partial \mathcal{T} \subset \Sigma$ ,  $\partial \mathcal{T} \subset \overline{\Sigma}$  and  $(\partial \mathcal{T} \cap \Sigma \neq \emptyset) \wedge$

したがって、式(app.11), (app.13)より、 $S^1 \cap S^2 = \{x | T \cap \Sigma\}$ . (pp.14)  
 式(app.7), (app.9), (app.14)より、  
 $S^3 = \{x | (\partial T \subset \Sigma) \wedge (\overline{\Sigma} \cap T \neq \emptyset)\}$ .

Besides,  $P \iff Q$  for the following reasons.

$$P : (\partial T \subset \Sigma) \wedge (\overline{\Sigma} \cap T \neq \emptyset)$$

$$Q : (\partial T \subset \Sigma) \wedge (\exists n, \partial P_n \cap \partial(\Sigma/P_n) \cap T \neq \emptyset)$$

A)  $P \implies Q$

$\Sigma$ は領域または切断された領域から構成されるため  
 を満たす領域  $\Sigma$  が存在する  $\partial T \subset \Sigma$ 。  $\Sigma \subseteq \Sigma$   
 $\Sigma$  を考える、

$$\overline{\Sigma} \cap T \neq \emptyset \implies \overline{\Sigma'} \cap T \neq \emptyset.$$

$$\therefore P \implies P_1,$$

$$P_1 : (\partial T \subset \Sigma') \wedge (\overline{\Sigma'} \cap T \neq \emptyset).$$

Because  $\exists n, \partial T \subset P_n$  as described in 5.4,  $\Sigma'$  is the  
 region of combined multiple  $P_n$ .

$$\therefore \exists n, \Sigma' = P_n \cup \Sigma'/P_n,$$

$$\Sigma'/P_n = \bigcup_{n' \neq n, n' \in N_{\Sigma'}} P_{n'}, \quad N_{\Sigma'} = \{n | P_n \subset \Sigma'\}.$$

$$\therefore P_1 \iff P_2,$$

$$P_2 : \exists n, (\partial T \subset P_n \cup \Sigma'/P_n) \wedge (\overline{P_n \cup \Sigma'/P_n} \cap T \neq \emptyset).$$

Because  $\partial T$  is a polygonal boundary,  $\partial T \in \partial C$ .

Therefore, from the lemma described in B.1,

$$P_2 \implies P_3,$$

$$P_3 : \exists n, \partial P_n \cap \partial(\Sigma'/P_n) \cap T \neq \emptyset.$$

Considering  $\partial(\Sigma'/P_n) \subset \partial(\Sigma/P_n)$ ,

$$P_3 \implies P_4,$$

$$P_4 : \exists n, \partial P_n \cap \partial(\Sigma/P_n) \cap T \neq \emptyset.$$

From  $P \implies \partial T \subset \Sigma$  and  $P \implies P_4$ ,

$$P \implies Q.$$

B)  $Q \implies P$

Considering  $\partial P_n \cap \partial(\Sigma/P_n) \subset \partial(P_n \cup \Sigma/P_n) = \partial\Sigma$ ,

$$\exists n, \partial P_n \cap \partial(\Sigma/P_n) \cap T \neq \emptyset \implies \partial\Sigma \cap T \neq \emptyset$$

$$\iff (\Sigma \cap T \neq \emptyset) \wedge (\overline{\Sigma} \cap T \neq \emptyset) \implies \overline{\Sigma} \cap T \neq \emptyset.$$

$$\therefore Q \implies P.$$

したがって

$$S^3 =$$

$$\{x | (\partial T \subset \Sigma) \wedge (\exists n, \partial P_n \cap \partial(\Sigma/P_n) \cap T \neq \emptyset)\}. \quad (\text{app.15})$$

また、 $\exists n$ を考えると、 $\partial P_n \cap \partial(\Sigma/P_n)$  は0  
 Iの存在と等価である、

$$\{x | \exists n, \partial P_n \cap \partial(\Sigma/P_n) \cap T \neq \emptyset\} = S^{OI \text{ inside } T}, \quad (\text{app.16})$$

ここで、 $S^{OI \text{ inside } T}$ はT内にOIを持つ解の集合を表す。

最後に、式(app.14), (app.15), (app.16)より

$$S^3 = \overline{S^1} \cap \overline{S^2} \cap S^{OI \text{ inside } T}. \quad (\text{app.17})$$

(5) 結論

From equations (app.8),(app.10),(app.12),(app.17),

$$\overline{C} = S^1 \cup S^2 \cup S^3 = \overline{S^{EI}} \cup S^{OEI} \cup S^{OI \text{ inside } T}.$$

$$\therefore C = S^{EI} \cap \overline{S^{OEI}} \cap \overline{S^{OI \text{ inside } T}}.$$

As a result,  $C$ , i.e., the feasible conditions described  
 in 4.1 are derived.



**Jun Nishimura** received his B.E. degree from the Tokyo Institute of Technology (currently the Institute of Science Tokyo) in 2014. He has worked for Japan Patent Office since 2014. He researched SAR (Spatial Augmented Reality) technology as a research student of the University of Electro-Communications from Apr., 2024 to Mar., 2025.



**Naoki Hashimoto** received his M.E. and Ph.D. degrees from the Tokyo Institute of Technology (currently the Institute of Science Tokyo) in 1999 and 2001, respectively. From 2001 to 2008, he was a research assistant at the Tokyo Institute of Technology. From 2008 to 2020, he was an associate professor at the University of Electro-Communications, and since 2020, he has been a professor. His research interests include image projection technology, virtual reality, augmented reality, and interactive technologies.

$(\partial\mathcal{T} \cap \bar{\Sigma} \neq \emptyset)$ , hence from equations (app.11),(app.13),  
 $\bar{\mathcal{S}}^1 \cap \bar{\mathcal{S}}^2 = \{x | \partial\mathcal{T} \subset \Sigma\}.$  (app.14)

From equations (app.7),(app.9),(app.14),  
 $\mathcal{S}^3 = \{x | (\partial\mathcal{T} \subset \Sigma) \wedge (\bar{\Sigma} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset)\}.$

Besides,  $P \iff Q$  for the following reasons.

$$P : (\partial\mathcal{T} \subset \Sigma) \wedge (\bar{\Sigma} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset)$$

$$Q : (\partial\mathcal{T} \subset \Sigma) \wedge (\exists n, \partial\mathcal{P}_n \cap \partial(\Sigma/\mathcal{P}_n) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset)$$

A)  $P \implies Q$

Because  $\Sigma$  consists of a region or regions disconnected with each other, there exists the region  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  satisfying  $\partial\mathcal{T} \subset \Sigma'$ . Considering  $\Sigma' \subseteq \Sigma \iff \bar{\Sigma}' \subseteq \bar{\Sigma}'$ ,

$$\bar{\Sigma} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset \implies \bar{\Sigma}' \cap \mathcal{T} \neq \emptyset.$$

$$\therefore P \implies P_1,$$

$$P_1 : (\partial\mathcal{T} \subset \Sigma') \wedge (\bar{\Sigma}' \cap \mathcal{T} \neq \emptyset).$$

Because  $\exists n, \partial\mathcal{T} \subset \mathcal{P}_n$  as described in 5.4,  $\Sigma'$  is the region of combined multiple  $\mathcal{P}_n$ .

$$\therefore \exists n, \Sigma' = \mathcal{P}_n \cup \Sigma'/\mathcal{P}_n,$$

$$\Sigma'/\mathcal{P}_n = \bigcup_{n' \neq n, n' \in \mathcal{N}_{\Sigma'}} \mathcal{P}_{n'}, \quad \mathcal{N}_{\Sigma'} = \{n | \mathcal{P}_n \subset \Sigma'\}.$$

$$\therefore P_1 \iff P_2,$$

$$P_2 : \exists n, (\partial\mathcal{T} \subset \mathcal{P}_n \cup \Sigma'/\mathcal{P}_n)$$

$$\wedge (\bar{\mathcal{P}_n} \cap \bar{\Sigma}'/\mathcal{P}_n \cap \mathcal{T} \neq \emptyset).$$

Because  $\partial\mathcal{T}$  is a polygonal boundary,  $\partial\mathcal{T} \in \partial\mathcal{C}$ .

Therefore, from the lemma described in B.1,

$$P_2 \implies P_3,$$

$$P_3 : \exists n, \partial\mathcal{P}_n \cap \partial(\Sigma'/\mathcal{P}_n) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset.$$

Considering  $\partial(\Sigma'/\mathcal{P}_n) \subset \partial(\Sigma/\mathcal{P}_n)$ ,

$$P_3 \implies P_4,$$

$$P_4 : \exists n, \partial\mathcal{P}_n \cap \partial(\Sigma/\mathcal{P}_n) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset.$$

From  $P \implies \partial\mathcal{T} \subset \Sigma$  and  $P \implies P_4$ ,

$$P \implies Q.$$

B)  $Q \implies P$

Considering  $\partial\mathcal{P}_n \cap \partial(\Sigma/\mathcal{P}_n) \subset \partial(\mathcal{P}_n \cup \Sigma/\mathcal{P}_n) = \partial\Sigma$ ,

$$\exists n, \partial\mathcal{P}_n \cap \partial(\Sigma/\mathcal{P}_n) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset \implies \partial\Sigma \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$$

$$\iff (\Sigma \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) \wedge (\bar{\Sigma} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) \implies \bar{\Sigma} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset.$$

$$\therefore Q \implies P.$$

Accordingly,

$$\mathcal{S}^3 =$$

$$\{x | (\partial\mathcal{T} \subset \Sigma) \wedge (\exists n, \partial\mathcal{P}_n \cap \partial(\Sigma/\mathcal{P}_n) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset)\}.$$

(app.15)

In addition, considering  $\exists n, \partial\mathcal{P}_n \cap \partial(\Sigma/\mathcal{P}_n)$  is equivalent to existence of OIs,

$$\{x | \exists n, \partial\mathcal{P}_n \cap \partial(\Sigma/\mathcal{P}_n) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset\} = \mathcal{S}^{OI \text{ inside } \mathcal{T}},$$

(app.16)

where  $\mathcal{S}^{OI \text{ inside } \mathcal{T}}$  denotes the set of solutions with OIs inside  $\mathcal{T}$ .

Finally, from equations (app.14),(app.15),(app.16),

$$\mathcal{S}^3 = \bar{\mathcal{S}}^1 \cap \bar{\mathcal{S}}^2 \cap \mathcal{S}^{OI \text{ inside } \mathcal{T}}. \quad (\text{app.17})$$

(5) Conclusion

From equations (app.8),(app.10),(app.12),(app.17),

$$\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2 \cup \mathcal{S}^3 = \bar{\mathcal{S}}^{EI} \cup \mathcal{S}^{OEI} \cup \mathcal{S}^{OI \text{ inside } \mathcal{T}}.$$

$$\therefore \mathcal{C} = \mathcal{S}^{EI} \cap \bar{\mathcal{S}}^{OEI} \cap \bar{\mathcal{S}}^{OI \text{ inside } \mathcal{T}}.$$

As a result,  $\mathcal{C}$ , i.e., the feasible conditions described in 4.1 are derived.



**Jun Nishimura** received his B.E. degree from the Tokyo Institute of Technology (currently the Institute of Science Tokyo) in 2014. He has worked for Japan Patent Office since 2014. He researched SAR (Spatial Augmented Reality) technology as a research student of the University of Electro-Communications from Apr., 2024 to Mar., 2025.



**Naoki Hashimoto** received his M.E. and Ph.D. degrees from the Tokyo Institute of Technology (currently the Institute of Science Tokyo) in 1999 and 2001, respectively. From 2001 to 2008, he was a research assistant at the Tokyo Institute of Technology. From 2008 to 2020, he was an associate professor at the University of Electro-Communications, and since 2020, he has been a professor. His research interests include image projection technology, virtual reality, augmented reality, and interactive technologies.